Introduzione alla matematica per le scienze economiche

Funzioni e grafici

Nelle scienze economiche l'uso della matematica risulta di fondamentale importanza come metodo 'formalizzato' di analisi. E' quindi necessario studiare i concetti matematici di base che saranno utilizzati nello svolgimento degli esercizi.

I principali fenomeni economici che rappresentano l'oggetto del nostro studio hanno la particolarità che assumono differenti valori in base ad una serie di circostanze che possono intervenire. Il termine *variabile* viene utilizzato per definire tale caratteristica.

In economia è possibile riscontrare l'esistenza di relazioni tra variabili. L'ipotesi che alcune variabili abbiano una influenza su altre viene formalizzato attraverso il concetto di *funzione*. Se due variabili x ed y sono collegate tra di loro in modo che ad ogni valore di x sia associato un determinato valore di y, allora diremo che y è funzione di x, scritta come:

$$y = f(x)$$

Il primo passo nello studio delle funzioni prevede l'interpretazione della relazione che si vuole specificare. Passare da un linguaggio matematico ad uno economico (e viceversa) deve diventare un'operazione mentale familiare e consentirvi di interpretare i differenti argomenti che verranno trattati nel corso.

Il secondo passo consiste nella rappresentazione nello spazio della funzione. In virtù di questa semplice operazione si possono ricavare molte informazioni utili sulla relazione funzionale che si sta studiando. Per poter rappresentare graficamente una funzione è necessario utilizzare un sistema di assi cartesiani dato dall'intersezione di due rette, una orizzontale ed una verticale, il cui punto di intersezione viene detto *origine*. Ogni punto del piano viene caratterizzato da una coppia di valori, uno sull'asse delle *ascisse*, l'altro sull'asse delle *ordinate*.

La forma funzionale più semplice è quella descritta dalla linea retta. In Figura 1 viene rappresentata la retta $y = 2x$. Si può notare che la retta in questione passa per l'origine, cioè passa per il punto di coordinate $(0, 0)$.

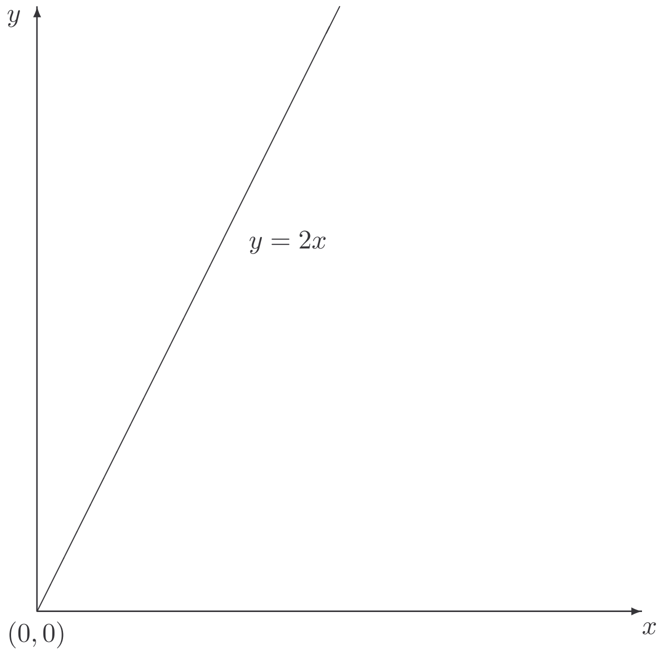

Figura 1

Per rappresentare velocemente la retta $y = 2x$, ad esempio, possiamo assegnare differenti valori numerici ad x e trovare i valori corrispondenti di y. In Tabella 1 riportiamo una serie di valori:

x	$y = 2x$
1	2
2	4
3	6
4	8

Tabella 1

Nel caso in cui la retta non passi per l'origine, si può adottare il metodo precedente oppure si possono determinare le *intercette,* cioè i punti di incontro tra la retta e gli assi cartesiani. Ricordo che risultano sufficienti due punti nel piano cartesiano per disegnare la retta.

In Figura 2 viene rapprentata la retta $y = 2x + 3$. Confrontando le due funzioni, si nota che esse hanno medesima inclinazione: per qualsiasi variazione di x, y varierà della stessa quantità. Tuttavia, la funzione di Figura 2 risulta traslata in verticale. Di quanto? Introduciamo il calcolo delle intercette: quando $x = 0$ la funzione $y = 2x$ assume il valore di 0, mentre la funzione $y = 2x + 3$ assume il valore di 3 ed il valore 3 in questo caso rappresenta proprio l'intercetta verticale.

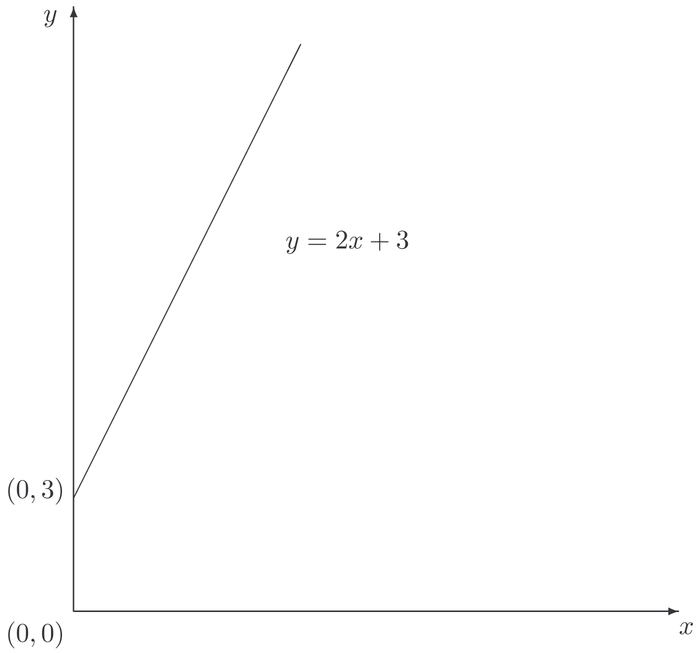

Figura 2

Possiamo ora riassumere i due casi precedenti scrivendo la generica funzione:

$$y = a + bx$$

dove b rappresenta l'inclinazione ed a un'intercetta. Questa forma definisce l'equazione generale di una retta. Nel primo caso considerato, $y = 2x$, $a = 0$ e la retta passa per l'origine, mentre nel secondo caso $a = 3$ ne definisce un'intercetta.

Un ulteriore esempio servirà a rendere chiaro il concetto di intercetta e la sua utilità nella rappresentazione di una funzione.

Consideriamo la seguente *funzione di domanda*, $p = 12 - 3q$, che esprime un legame tra la quantità presente sul mercato ed il prezzo di vendita di un certo prodotto. [1]

Per rapprentare tale funzione sul piano, è sufficiente trovare le due intercette:

$$\begin{aligned} q &= 0 \Longrightarrow p = 12 \\ p &= 0 \Longrightarrow q = 4. \end{aligned}$$

In Figura 3 la funzione $p = 12 - 3q$ viene rappresentata a partire dalle intercette:

[1] In questo caso la funzione di domanda è detta *inversa*, come studierete nelle prossime lezioni.

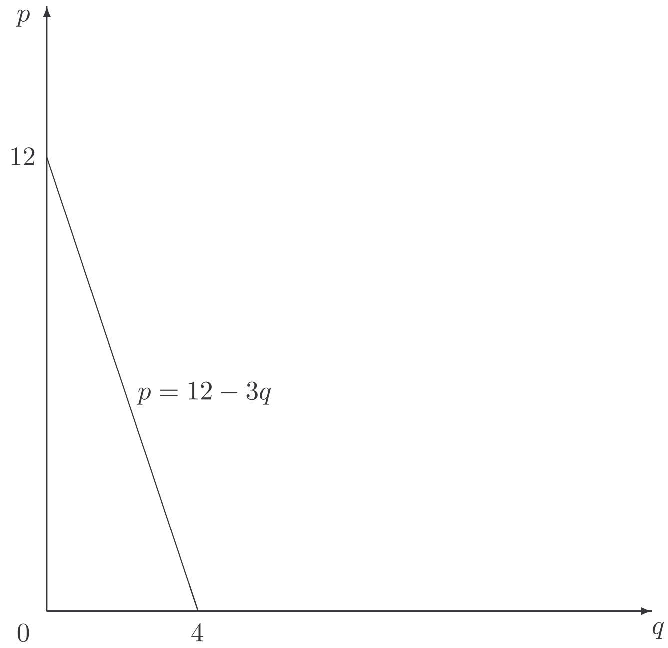

Figura 3

Le derivate:

La rappresentazione di una funzione, come abbiamo visto nella sezione precedente, risulta di particolare importanza per capire l'andamento della relazione che si analizza. Una funzione crescente tra consumo e reddito, ad esempio, indica che il consumo di un determinato bene aumenta quando aumenta il reddito disponibile. In questa sezione vogliamo andare oltre; non ci interessa solamente capire *come* cambia la variabile dipendente quando variano le variabili indipendenti, ma vogliamo sapere esattamente di *quanto* varia.

In primo luogo, è necessario definire il concetto di *rapporto incrementale*, cioè il rapporto tra la variazione nella variabile dipendente e quello della variabile indipendente:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

La derivata, indicata da dy/dx, viene definita come il limite del rapporto incrementale quando la variazione della variabile indipendente tende a zero:

$$\frac{dy}{dx} \equiv \lim_{(x_2 - x_1) \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Essa rappresenta l'inclinazione della tangente nel punto $(x_1, f(x_1))$.

In Tabella 2 viene proposto uno schema riassuntivo delle derivate più comuni. Indicando con $f(x)$ e con $f'(x)$ la sua derivata prima, otteniamo:

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$

Tabella 2

Nella Tabella 2 a è una costante mentre n indica un numero qualsiasi.

Di particolare importanza risultano anche le operazioni con le derivate, che rappresento nella Tabella 3:

Derivata della somma	$F(x) = f(x) + g(x)$	$F'(x) = f'(x) + g'(x)$
Derivata del prodotto	$F(x) = f(x) \cdot g(x)$	$F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Derivata del quoziente	$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$F(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Tabella 3

Nel corso degli esercizi incontrerete funzioni esponenziali e logaritmiche che spesso causano problemi quando si richiede di applicare ad esse le principali regole di derivazione. Nella Tabella 4 riporto alcune semplici regole che saranno utili a coloro che incontrano problemi di questo tipo:

$x^0 = 1$	$x^m x^n = x^{m+n}$	$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
$\ln e^x = x$	$\ln e = 1$	$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$	$\ln(x)^n = n \ln(x)$	

Tabella 4

Di particolare importanza risulta anche il concetto di *derivata parziale*. Quando si incontra una funzione che dipende da due o più variabili, è possibile infatti valutare la variazione della funzione solo rispetto ad una di esse, considerando le altre come costanti. Ad esempio, se consideriamo la funzione a due variabili $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, è possibile determinare la derivata parziale rispetto ad x_1, indicata con $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ e la derivata parziale rispetto ad x_2, indicata con $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}$. Considerando come costante la variable che **non** interessa nella derivazione parziale, si ottiene:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = b.$$

Alcuni esercizi serviranno a chiarire meglio questo concetto:

Esercizi proposti:

1. Data la funzione a due variabili $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + 3\sqrt{x_1}$, calcolare $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}$.

   Nel caso della derivata parziale rispetto ad x_1, indicata con $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, si considera x_2 come costante. Applicando le regole di derivazione si ottiene:

   $$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = x_2 \; + 3\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = x_2 \; + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x_1}}$$

   Allo stesso modo, quando si opera la derivata parziale rispetto ad x_2 si considera x_1 come costante e si ottiene:

   $$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_1 \; .$$

2. Data la funzione a due variabili $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} 3\,(x_2)^4$, calcolare $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}$.

   $$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -\frac{1}{(x_1)^2} \cdot 3\,(x_2)^4 = -3\left[\frac{(x_2)^2}{x_1}\right]^2$$

   $$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{x_1} 3 \cdot 4\,(x_2)^3 = 12\frac{(x_2)^3}{x_1}$$

Applicazioni economiche: l'elasticità

L'elasticità viene definita come *misura della sensibilità di una variabile rispetto ad un'altra.* In particolare, indica la variazione percentuale di una variabile in risposta ad una variazione dell'1% di un'altra. In microeconomia si studiano due tipi fondamentali di elasticità della domanda: l'elasticità della domanda rispetto al reddito e l'elasticità della domanda rispetto al prezzo. In questo secondo caso, si considera sia l'elasticità rispetto al proprio prezzo che rispetto al prezzo di altri beni, o *elasticità incrociata.* L'elasticità incrociata è utile per distinguere i beni *sostituti* dai beni *complementari.*

L'elasticità dell'offerta viene definita in maniera analoga.

Esercizi proposti

1. Esercizi 5-6 pag. 31-32 (C-L).

2. Esercizio 9 pag. 34 (C-L).