Teoria dei Giochi: Storia e Metodologia[1]

Luca Lambertini
Dipartimento di Scienze Economiche
Università di Bologna

March 30, 2000

[1]Ringrazio Ennio Cavazzuti, Massimo Marinacci, Stephen Martin e Manuela Mosca per commenti e discussioni sul contenuto di questo lavoro, la cui responsabilità resta esclusivamente mia.

Abstract

This paper briefly reviews the main steps in the development of game theory. Then, a methodological discussion is proposed, aiming at showing that game theory in particular (and mathematical economics in general) and quantum mechanics are isomorphic.

Questo lavoro passa rapidamente in rassegna i passi principali che hanno segnato lo sviluppo della teoria dei giochi. Quindi, attraverso una discussione metodologica, si propone di mostrare l'isomorfismo tra teoria dei giochi (e, più in generale, economia matematica) e meccanica quantitstica.

1 Introduzione

"Nella fisica teorica la ricerca dell'autoconsistenza logica è sempre stata, ai fini della realizzazione di progressi, più importante dei risultati sperimentali. Teorie altrimenti belle ed eleganti sono state rifiutate perchè non si accordavano con le osservazioni; ma non conosco alcuna teoria importante che abbia fatto progressi solo sulla base dell'esperimento. La teoria è sempre venuta prima, portata avanti dal desiderio di avere un modello matematico elegante e coerente. (...) Una teoria è una buona teoria, ossia un modello elegante, se descrive una vasta classe di osservazioni e se predice i risultati di nuove osservazioni. Aldilà di questo non ha senso chiedersi se essa corrisponda o no alla realtà perchè non sappiamo che cosa sia la realtà indipendentemente da una teoria."

Stephen Hawking

Conferenza al Gonville and Caius College, Cambridge, maggio 1992

A partire dalla metà degli anni Settanta, la teoria dei giochi è entrata nello strumentario degli economisti, in particolare di quelli che si occupano di teoria dei mercati. Di fatto, si può sostenere che la trasformazione che ha interessato questa particolare sotto-disciplina in quello stesso periodo, vale a dire il passaggio dall'Economia Industriale alla Teoria dell'organizzazione Industriale,[1] sia stata il cavallo di Troia che ha permesso poi alla teoria dei giochi di diffondersi in altre sotto-discipline della teoria economica, in forma più o meno capillare.

Come accade a tutte le teorie relativamente giovani, anche la teoria dei giochi, per il momento, non è stata oggetto di un particolare interesse da parte degli storici dell'analisi economica. Questa considerazione vale senza dubbio se si guarda puramente alla mole globale di contributi al riguardo, ma non vale se si valutano i contenuti e la portata di diversi tra tali contributi. Questo è il caso dei lavori di Aumann (1985), Leonard (1994, 1995), Myerson (1999) e del volume a cura di Weintraub (1992), che in realtà è un fascicolo monografico di *History of Political Economy*.

Questo breve elenco di riferimenti offre subito uno spunto degno di discussione. Esistono due approcci alternativi al problema di come trattare

[1] Quest'ultima etichetta è di uso relativamente recente. Inizialmente si era soliti definirla come *New Industrial Economics*, definendo così implicitamente come *old* la precedente.

l'evoluzione di una disciplina. Una è quella cosiddetta *internalista*, cioè dovuta a esponenti della disciplina stessa, ed una *non-internalista*, ad opera degli storici del pensiero o dell'analisi. La prima replica una linea già sperimentata in fisica fin dal contributo di Einstein e Infeld (1938), e di cui abbiamo diversi esempi nella letteratura corrente, a diversi livelli di approfondimento (Hawking, 1988, 1992; Hawking e Penrose, 1996, *inter alia*). La seconda riflette invece l'interesse degli storici del pensiero e dell'analisi verso la valutazione e la collocazione di una disciplina all'interno di un quadro filosofico e metodologico più ampio.

Nel caso della teoria dei giochi, il dibattito tra gli esponenti delle due scuole è appena iniziato, ma già consente di mettere in luce i nodi principali, di natura interpretativa. Vale a dire, i primi generalmente godono di un complrensibile vantaggio sul piano dell'interpretazione tecnica dell'evoluzione degli strumenti (i concetti di equilibrio), mentre i secondi imputano ai primi (i) di non apprezzare appieno i risvolti filosofici della disciplina; e (ii) di non curarsi delle possibili radici 'esterne' alla disciplina. In parole povere, il punto (ii) si materializza nell'osservazione secondo cui l'evoluzione della teoria dei giochi è stata periodicamente condizionata da interventi da parte di non-economisti, e in particolare di matematici, come von Neumann e Nash.[2]

Al riguardo, una posizione anodina, e quindi genericamente condivisibile anche se a mio avviso estremamente poco produttiva, consiste nell'argomentare che nessuno dei due approcci coglie completamente nel segno, e che tuttavia entrambe hanno senz'altro i propri lati positivi.

Esiste però un'alternativa, che è una terza via alla storia della teoria dei giochi e dell'economia matematica. Questa dovrebbe auspicabilmente concretizzarsi in un'approccio metodologico 'allargato', intendendo con questo che deve mantenere il rigore proprio della prospettiva internalista, e nello stesso tempo collocare la teoria in oggetto nella giusta posizione all'interno del quadro generale del metodo scientifico, mettendone in luce le relazioni formali (e quindi, sarei tentato di dire, anche *sostanziali*) con le cosiddette *hard sciences*.

L'obiettivo specifico di queste note è quello di fornire alcuni elementi in questa direzione. Quindi, per una mia esplicita scelta, non proporrò un'analisi prospettica dell'evoluzione della teoria dei giochi attraverso un qualche

[2] A questo particolare riguardo, mi viene spontaneo obiettare che si tratta di un'osservazione banale, in quanto, proprio con riferimento a von Neumann, è valida anche per la fisica e, in generale, per qualsisi disciplina che mutui strumenti quali la matematica. Ha senso porsi un problema del genere?

albero genealogico dei suoi strumenti,[3] se non nella misura in cui questo sarà indispensabile alla linea che intendo esporre, basata su alcuni elementi fondamentali che si possono sintetizzare come segue. Le fondamenta sia della teoria dei giochi che di larga parte dell'economia matematica corrente si possono rintracciare in *The Theory of Games and Economic Behavior* (von Neumann e Morgenstern, 1944). In tale opera si introduce l'uso generalizzato del valore atteso come operatore fondamentale all'interno della teoria dell'utilità attesa. Tradizionalmente, e giustamente, a tale operatore si attribuiscono radici statistiche (si veda il lavoro di Fishburn e Wakker (1995), nonchè le fonti ivi citate). Tuttavia, questa 'attribuzione' non cattura un elemento cruciale in comune tra l'economia matematica e la fisica contemporanea, cioè quella quantistica, vale a dire il fatto che entrambe comunicano il medesimo messaggio: la nostra conoscenza ex ante (cioè previsiva) del mondo è definita (in modo probabilistico) esattamente negli stessi termini, sia che ci occupiamo di particelle subatomiche, sia che ci occupiamo di imprese e consumatori. La tesi che intendo sostenere nelle pagine che seguono è che questa coincidenza, che allude ad un concetto più ampio, vale a dire all'esistenza di un solo *modus* conoscitivo che noi usiamo in campi diversi, ha avuto un catalizzatore, nella persona di John von Neumann, che nell'arco di dodici anni (1932, 1944) ha 'fissato' le idee di fondo in entrambe le discipline attribuendo loro la stessa struttura metodologica, rendendole cioè *isomorfe*. La chiave di volta di questo isomorfismo è quello che gli economisti chiamano *valore atteso* e che invece i fisici quantistici dopo von Neumann chiamano *matrice densità*.

Il lavoro è strutturato come segue. La sezione 2 contiene una brevissima rassegna dei punti nodali attraverso i quali si è sviluppata la teoria dei giochi. Le due sezioni successive illustrano il concetto del minimax e i teoremi del punto fisso, ivi compreso il teorema di Nash relativo all'equilibrio non cooperativo di un gioco a somma variabile. La sezione 5 fa il punto sulla relazione tra modelli matematici, logica e mondo fisico. La sezione 6 sviluppa l'argomentazione relativa all'isomorfismo tra fisica quantistica ed economia matematica. La bibliografia, che elenca molte fonti non direttamente citate nel testo, è suddivisa in modo da focalizzare l'attenzione sui lavori fondamentali, offrendo al lettore interessato approfondimenti in varie direzioni.

[3] In particolare, non farò alcun riferimento ai giochi ripetuti, che occupano un posto di grande rilievo all'interno della teoria dei giochi *non differenziali*. Rimando il lettore interessato a Fudenberg e Tirole (1991) e Osborne e Rubinstein (1994).

2 Breve cronologia

In questa sede, mi limito a fissare alcuni punti essenziali. Per una trattazione più dettagliata dell'evoluzione della teoria dei giochi e dei concetti di equilibrio da essa prodotti, si rimanda il lettore interessato ad Aumann (1985) e Myerson (1999).

- Teorema di Zermelo (1913): una partita a scacchi finisce sicuramente in uno dei seguenti tre modi: vince il bianco, vince il nero, oppure stallo (ovvio, no?).[4] Questo teorema inaugura l'approccio assiomatico ai giochi, come sottoinsieme del cosiddetto *programma di Hilbert* per una assiomatizzazione completa dei sistemi formali.

- Teorema del minimax (von Neumann, 1928). Basato sul teorema del punto fisso nella sua prima formulazione (Brouwer, 1910), il minimax è il primo concetto di soluzione di un gioco non cooperativo, ma la sua applicabilità è limitata ai giochi a somma costante.

- In *The Theory of Games and Economic Behavior* (1944), von Neumann e Morgenstern introducono il concetto di *stable set* e separano i giochi cooperativi da quelli non cooperativi. Tuttavia, posti di fronte al problema di come risolvere giochi a somma variabile, von Neumann e Morgenstern adottano la linea secondo cui tali giochi si offrono essenzialmente ad una soluzione negoziale e quindi possono essere risolti come giochi di coalizione tramite il concetto di *stable set*. Tutti i giochi considerati sono ad *informazione completa*.

- Equilibrio di Nash (Nash, 1950, 1951). Basato sul teorema del punto fisso di Kakutani (1941), è un concetto di soluzione valido per qualsiasi gioco non cooperativo. Di fatto, si può considerare come la generalizzazione del minimax ai giochi a somma variabile.

- Selezione degli equilibri, *backward induction* e perfezione nei sottogiochi (Selten, 1965, 1975). Il criterio della perfezione nei sottogiochi (*subgame perfectness*) è il principale *refinement* dell'equilibrio di Nash,

[4] Si noti, peraltro, che Zermelo non fornisce la dimostrazione di tale teorema, ma solo l'enunciato (cfr. Aumann, 1999).

e permette di eliminare gli equilibri di Nash basati su strategie non credibili.[5]

- Giochi ad informazione incompleta, risolti *come se* fossero ad informazione completa ma imperfetta (Harsanyi, 1967). Il lavoro di Harsanyi propone il concetto di equilibrio perfetto di Bayes-Nash.

Come ho anticipato nell'introdzione, in questa sede non intendo soffermarmi a soppesare nè lo sviluppo della teoria dei giochi, nè il suo ruolo nel percorso intrapreso dalla teoria economica nel secondo dopoguerra. Per una valutazione dei meriti ascrivibili alla teoria dei giochi, e delle motivazioni che hanno condotto al conferimento del Nobel a Nash, Harsanyi e Selten, si veda van Damme e Weibull (1995).

3 Minimax

Il teorema del minimax (o del maximin) stabilisce che **ogni gioco finito a somma costante possiede almeno un punto di equilibrio di minimax** in strategie pure o miste (von Neumann, 1928). Si consideri la seguente matrice, dove compaiono solo i *payoffs* del giocatore A :

$$\begin{array}{cccc} & & B & \\ & & s & d \\ A & a & 4 & 5 \\ & b & 3 & 6 \end{array}$$

Matrice 1

Si definisca $\pi_A(\sigma_A, \sigma_B)$ il *payoff* del giocatore A quando il risultato (*outcome*) del gioco è $\{\sigma_A, \sigma_B\}$, cioè A sceglie la mossa (o strategia) $\sigma_A \in \{a, b\}$ mentre B sceglie $\sigma_B \in \{s, d\}$. Se la somma costante dei *payoffs* dei due giocatori è k, allora è agevole completare la matrice, volendo includervi anche $\pi_B(\sigma_B, \sigma_A) = k - \pi_A(\sigma_A, \sigma_B)$. Al fine di risolvere il gioco, tuttavia, è suffieciente considerare che, se l'obiettivo di entrambi gli agenti è **massimizzare il minimo payoff ottenibile data la strategia dell'altro**, allora il modo in cui è scritta la matrice ci consente di ragionare come segue:

[5] L'dea della soluzione per induzione a ritroso era già presente, sia pure in termini impliciti, nella letteratura, a partire dal lavoro di Kuhn (1953) che introduceva il concetto di gioco in forma estesa, la cui rappresentazione è nota come *albero di Kuhn*.

- A gioca $\widehat{\sigma}_A \in \arg\left\{\max_{\sigma_A} \min\right\} \pi_A = \arg\left\{\min_{\sigma_A} \max\right\} \pi_B$;
- B gioca $\widehat{\sigma}_B \in \arg\left\{\min_{\sigma_B} \max\right\} \pi_A = \arg\left\{\max_{\sigma_B} \min\right\} \pi_B$,

dove:

- il profilo di strategie $\{\widehat{\sigma}_A, \widehat{\sigma}_B\}$ identifica l'equilibrio di minimax (o maximin) se e solo se:

$$\pi_i(\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_j) \geq \pi_i(\widetilde{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_j) \ \forall i, j, \text{ e } \forall \widetilde{\sigma}_i \neq \widehat{\sigma}_i \ , \tag{1}$$

  e

$$\max_{\sigma_A} \min \pi_A = \min_{\sigma_B} \max \pi_A \ . \tag{2}$$

Come si può notare, la (1) non è altro che la condizione relativa all'equilibrio di Nash. Risolviamo ora il gioco proposto nella matrice 2, che ripropone lo stesso gioco della matrice 1, aggiungendo tra parentesi in ogni casella i *payoffs* di B, normalizzando k a 10.

		B	
		s	d
A	a	4(6)	5(5)
	b	3(7)	6(4)

Matrice 2

Si nota immediatamente che il massiminimo di A è 4 lungo la strategia a, mentre il minimassimo dal punto di vista di B è di nuovo 4 lungo la strategia s. E' inoltre immediato verificare che invertendo le parti il risultato non cambia. Il profilo di strategie $\{a, s\}$ è l'equilibrio del gioco, in quanto punto di sella (in realtà, come vedremo tra poco, è l'unico **punto fisso** del gioco). Quando non esiste in strategie pure, esiste tuttavia in strategie miste, a patto che il gioco sia *finito*.

4 Teorema del punto fisso

Tradizionalmente, l'economia matematica, da Walras (1874) in poi, considera il problema della risolvibilità di un sistema di n condizioni in base alla corrispondenza tra il numero di condizioni (ad esempio, condizioni di primo ordine oppure condizioni di eguaglianza tra domanda ed offerta) ed il numero delle incognite coinvolte. Questo, tuttavia, non garantisce nè che esista sempre una soluzione nè tantomeno che tale condizione, posto che esista, abbia senso economico. Una svolta in positivo riguardo la condizione di esistenza è rappresentata dal teorema del punto fisso, la cui prima formulazione è dovuta a Brouwer (1910). In generale, il teorema del punto fisso asserisce che una mappatura f, che trasformi ogni punto x di un insieme X in un punto $f(x)$ appartenente al medesimo insieme X, ha un punto fisso x^* che viene trasformato in se stesso, in modo tale che sia possible scrivere $f(x^*) = x^*$. L'esistenza del punto fisso non è assicurata per qualsiasi mappatura, ma richiede che essa e l'insieme X possiedano particolari proprietà. Nella sua formulazione iniziale, il teorema di Brouwer richiede che X sia l'insieme dei punti dello spazio euclideo n-dimensionale, le cui coordinate siano non-negative e sommino ad uno, dando luogo a quello che viene definito *simplesso*. Inoltre, si richiede che la funzione (*single-valued*) f operi la trasformazione in modo *continuo*. Si noti che la prima applicazione nota di questo teorema all'interno della letteratura economica si rintraccia nel modello di crescita bilanciata di von Neumann (1937), mentre lo stesso autore non ne fa uso per costruire il teorema del minimax.

L'estensione del teorema del punto fisso è dovuta a Kakutani (1941). Qui, la mappatura è *point-to-set*, o *multi-valued* (cioè è una *corrispondenza*). In tal caso, il punto fisso $x^* \in f(x^*)$. Se è soddisfatta la condizione di semicontinuità superiore ed $f(x^*) \neq \emptyset$, esiste almeno un punto fisso $x^* \in f(x^*)$.

Si consideri ora il seguente teorema di esistenza dell'equilibrio in giochi non-cooperativi ad n giocatori:

Teorema (Nash, 1950) Sia $\pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ la funzione di *payoff* del giocatore i-esimo, $i \in N = \{1, 2, 3, ...n\}$, continua rispetto alle strategie σ_i ed σ_{-i} (appartenenti rispettivamente agli insiemi Σ_i ed Σ_{-i}, chiusi, limitati e convessi). Un punto di equilibrio, definito dall'n-upla $\{\widehat{\sigma}_i, \widehat{\sigma}_{-i}\}$ che massimizza π_i posto che tutti i giocati meno i fissino $\sigma_{-i} = \widehat{\sigma}_{-i}$, si ottiene come punto fisso di una mappatura f che trasforma ogni generica n-upla di strategie $\{\sigma_i, \sigma_{-i}\}$ nel prodotto cartesiano di M_i, che è l'insieme delle strategie di i che ne massimizzano il *payoff* π_i per qualsiasi scelta fatta dagli altri giocatori. La f trasforma ogni punto $\{\sigma_i, \sigma_{-i}\}$ nell'insieme chiuso definito dal prodotto cartesiano $M_1 \times M_2 \times M_3 ... \times M_n \subset \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \Sigma_3 ... \times \Sigma_n$ e possiede (almeno) un punto fisso, in virtù del teorema di Kakutani.

Si noti che le M_i a cui si fa riferimento nella formulazione del teorema definiscono, anche se in termini un po' criptici, le funzioni di risposta ottima dei giocatori coinvolti. Esattamente come nel caso del minimax, l'esistenza dell'equilibrio è assicurata *almeno* in strategie miste. E' appena il caso di sottolineare che il teorema di Nash contiene, come caso particolare, il teorema del minimax.

E' invece più rilevante ricordare che Nash, imbattendosi in *The Theory of Games and Economic Behavior* (von Neumann e Morgenstern, 1944) a Princeton, si rende conto che gli autori (von Neumann in particolare) si erano bloccati davanti al problema posto dalla soluzione di giochi non-cooperativi a somma non costante.

Quando, nel 1949, il giovane John Nash, fresco studente di PhD in cerca di un argomento su cui scrivere la propria tesi di dottorato in matematica, si reca nell'ufficio di von Neumann all'Institute for Advanced Study per raccontargli tale teorema, naturalmente non nella forma (definitiva) in cui è scritto sopra, si sente rispondere che "non è altro che un teorema del punto fisso" (cit. in Nasar, 1999).[6] E' oppurtuno sottolineare che l'unica occasione che Nash avesse avuto di familiarizzare con l'economia, in precedenza, era stato un corso opzionale di teoria del commercio internazionale seguito all'ultimo anno del corso *undergraduate* di matematica a Carnegie Tech. Secondo quanto risulta dalla testimonianza dello stesso Nash, fu in quell'occasione che maturò in Nash l'idea che poi avrebbe portato l'autore al teorema di esistenza dell'equilibrio (cfr. Leonard, 1994; Nasar, 1999).

Sul senso da attribuire alla discussione sulla paternità dell'equilibrio, contesa (non da loro, ma dai commentatori) tra Cournot e Nash, si potrebbe discutere a lungo (Leonard, 1994). Non sono convinto che ne valga la pena, se non nella misura in cui questo potrebbe portare a sgombrare il campo da una *vexata quaestio* di dubbia rilevanza e probabilmente del tutto malposta.

[6] Nash riferisce poi questa conversazione al proprio supervisore, Tucker, il quale lo incoraggia a proseguire sulla stessa linea e completare al più presto la tesi. Nel farlo, sembra che Nash abbia usufruito ben poco della supervisione di Tucker, mentre deve avere ricevuto qualche suggerimento da Gale (cfr. Leonard, 1994, e Nasar, 1999).

Leonard (1994), nell'intento di stabilire che Nash *non* è inseribile in una linea genealogica che parta da Cournot, mette in discussione la posizione di Aumann (1985), secondo cui l'equilibrio di Nash è sempre esistito nella letteratura, e Nash lo ha catturato nella sua forma generale e definitiva. In effetti, è mia opinione che Leonard fraintenda il significato di quanto scrive Aumann, che appare ben lontano dal vedere Cournot come precursore di Nash. Semmai, Aumann ha la visione Platonica, tipica di molti matematici, di un mondo delle idee che esiste fuori dal tempo, a cui si può attingere in forme piu (Nash) o meno (Cournot, Bertrand, Edgeworth) accurate.

Semmai, è quantomeno curioso che von Neumann non si sia accorto che a portata di mano c'era una potente generalizzazione del teorema del minimax, che, si noti, non è altro che un sotto-sottoprodotto del teorema del punto fisso di Brouwer e Kakutani (questo fatto appare tanto meno comprensibile se si ricorda che von Neumann è stato il primo ad applicare tale teorema all'interno dell'economia). Ma questo è un nodo che forse non verrà mai sciolto.[7]

Può essere invece più interessante, oltrechè fruttifero, soffermarsi sul forte impulso (e sulla direzione in cui esso fu somministrato) alla teoria dei giochi da parte del governo statunitense (e delle sue forze armate) attraverso la RAND Corporation (nominalmente, una divisione della Douglas) e l'ONR.[8]

Negli anni immediatamente successivi alla fine del secondo conflitto mondiale, molti tra i maggiori ricercatori in attività negli Stati Uniti furono reclutati dalla RAND per condurre ricerche connesse con il Dipartimento della Difesa. E' il caso di Arrow, Bellman, Blackwell, Isaacs, Nash, von Neumann, Tucker e moltissimi altri.

In particolare, Bellman e Isaacs erano impegnati nello sviluppo della strumentazione matematica atta ad analizzare problemi di ottimizzazione dinamica.

Si noti il fatto, apparentemente sorprendente, che la maggior parte del-

[7] Un altro quesito interessante è perchè la professione non faccia uso del (e, in generale, nemmeno riferimento al) modello di crescita bilanciata di von Neumann (1937), che precede di quasi vent'anni quello di Solow, che invece compare in tutti i libri di testo. Oltre a costituire la prima applicazione del teorema del minimax, il modello di crescita di von Neumann è interessante per molti altri motivi, ed in particolare per la filosofia che lo sottende. Non per nulla, nella terminologia di Hicks, il modello di von Neumann individua la *massima traversa*, massimizzando il tasso di crescita sotto il vincolo del consumo di sussistenza sufficiente appena ad assicurare la riproduzione del fattore lavoro.

[8] Alle quali, tra l'altro si deve la pubblicazione, rispettivamente, del *RAND Journal of Economics* e del *Naval Research Logistics Quarterly*, su cui sono apparsi molti contributi fondamentali.

l'analisi microeconomica - e in particolare dell'economia industriale - è stata condotta in contesti statici, anche se questo è in chiaro contrasto con la realtà. Persino il problema dell'interazione ripetuta nel tempo tra agenti (imprese) descritta dalla teoria dei giochi ripetuti, è stata affrontata in un contesto statico, in cui la matrice del gioco costituente è invariante rispetto al tempo.

La teoria dei giochi differenziali è scaturita dal lavoro di Isaacs (1954), sotto forma di rapporti interni della RAND Corporation, contenenti i risultati delle ricerche da lui condotte a partire dalla fine del decennio precedente. Il motivo dell'emarginazione della teoria dei giochi differenziali dal *mainstream* dell'economia teorica è certamente da indentificarsi nel fatto che Isaacs, come molti tra i suoi colleghi, era vincolato dal segreto imposto dal Governo degli Stati Uniti, che intendeva utilizzare le ricerche a fini militari, nel pieno della Guerra Fredda.[9] Le stesse considerazioni valgono, in linea di massima, per le controparti di Isaacs e dei suoi colleghi, in Unione Sovietica. In entrambi i casi, i risultati delle loro ricerche furono messi a disposizione della comunità scientifica a metà degli anni Sessanta (Isaacs, 1965; Pontryagin, 1966). Come conseguenza diretta di questo ritardo, le applicazioni economiche della teoria dei giochi differenziali sono estremamente recenti e relativamente poche (si veda Başar e Olsder, 1982, 1995^2).

Infine, esiste un dibattito storico-metodologico sul significato da attribuire all'equilibrio di Nash quando esso venga considerato, in retrospettiva, come la sistemazione definitiva di un processo iniziato con Cournot e passato attraverso Bertrand, Edgeworth (i cui riferimenti vengono omessi in quanto, in larga misura, superflui), Stackelberg (1934) e Fellner (1949). Questo dibattito si incentra su due questioni, vale a dire:

- se sia o no plausibile che ciascuno dei due giocatori si trovi sulla propria funzione di reazione, *anche all'esterno dell'equilibrio*, e la risposta è affermativa in base al concetto di *common knowledge*;[10]

- se sia o no plausibile concepire un processo di aggiustamento verso l'equilibrio, così come spesso viene raccontato nei libri di testo (e non

[9] Un godibile resoconto dell'attività di ricerca e dell'atmosfera esistente alla RAND Corporation nei primi anni Cinquanta si trova in Nasar (1998). Inoltre, è interessante visitare il sito web della RAND: http://www.rand.org.

[10] L'introduzione informale del concetto di *common knowledge* va attribuita a Lewis (1969), mentre la sua formalizzazione è di Aumann (1976). Sul ruolo del concetto di *common knowledge* nella teoria dei giochi, si rimanda a Binmore e Brandenburger (1990) e Geanakoplos (1994), *inter alia*.

solo in quelli, purtroppo), e in questo caso la risposta è negativa, in quanto (i) il tempo reale del modello è uniperiodale, e (ii) se, dati (i) e le ipotesi di razionalità massimizzante e di informazione completa e imperfetta, i giocatori dovessero fissare alcunchè di diverso dalla propria strategia o mossa di equilibrio simultaneo, allora violerebbero le regole del gioco (cioè sarebbero incoerenti).

Naturalmente, il fatto che fino al 1949 si discutesse su tali questioni è dovuto alla mancanza della definizione rigorosa di equilibrio (e di ciò che avviene o non avvieve nel modello) fino al 1950. Più sorprendente è il fatto che incomprensioni del genere siano continuate anche negli anni ottanta ed oltre (Dowrick, 1986; Varian, 1992), nonostante i contributi incontrovertibili di d'Aspremont e Gérard-Varet (1980) e di Hamilton e Slutsky (1990).

Per chiarire ulteriormente (e brevemente) il mio punto di vista su questioni del genere, discuterò quelle che si potrebbe etichettare come il primato della logica sulla formalizzazione matematica e la presenza o assenza di un legame tra i modelli matematici e la realtà fisica.

5 Logica, matematica, e mondo reale

La *vulgata* riguardo l'atteggiamento scientifico sostiene che le discipline scientifiche tentano di spiegare il funzionamento del mondo. La tentazione naturale che ne deriva è quella di pensare che (o almeno dichiedersi se) le teorie (fisiche, chimiche o economiche) siano *vere*. La tentazione ulteriore è quella di chiedersi il perchè di tutto, dove per "tutto" si deve intendere tutto quanto è contenuto in tali discipline, e di aspettarsi delle risposte a tutti questi perchè esattamente come fanno i bambini.

In quanto alla prima questione, la risposta che mi sembra più corretta è quanto sostiene Stephen Hawking, quando afferma che non sappiamo che cosa sia la realtà (e non ha senso chiederselo) al di fuori di una buona teoria. Ciò che probabilmente trae in inganno (non solo i profani) è il lato empirico del problema, vale a dire il fatto che le scienze abbiano una componente sperimentale che, almeno in una certa misura ed in certe fasi della loro evoluzione, costituisce il passo iniziale verso la costruzione dei modelli teorici. A questo proposito, si possono avanzare alcune considerazioni. La prima è che l'empirismo può solo confutare una teoria, ma non può produrre la certezza assoluta che essa sia corretta, vale a dire che la sua correttezza è tale solo in assenza di prova contraria. La seconda considerazione riguarda il fatto che il percorso dall'empirico al teorico non è affatto una regola ferrea. Ad esempio, quando Einstein ha formulato le teorie della relatività (speciale e generale) non lo ha certamente fatto perchè pensava che fossero "vere" (qualunque cosa questo possa significare), ma solo perchè erano esteticamente belle ed erano coerenti (internamente ed esternamente, cioè rispetto sia a se stesse che al resto delle teorie fisiche allora esistenti). Inoltre, la relatività non prendeva le mosse da osservazioni empiriche, che sono state prodotte in seguito a comprovarne la validità.

Per quanto riguarda la seconda tentazione, esiste un problema legato alla ricorsività dei perchè e all'incompletezza dei sistemi formali. I perchè che possiamo formulare funzionano come i giochi di scatole cinesi. Quando spieghiamo il comportamento dei protoni e dei neutroni facendo riferimento ai quark, dobbiamo poi chiederci se i quark siano effettivamente le particelle elementari oppure no, e così via. Quindi, la nostra conoscenza è intrinsecamente ricorsiva. In più, siamo certi che sia incompleta, a causa del *teorema dell'indecidibilità* di Gödel (1931), che afferma che qualunque sistema formale, che contenga come sottoinsieme proprio l'aritmetica, contiene proposizioni di cui non è possibile dimostrare la verità o la falsità all'interno del sistema stesso, che può essere completo solo a patto di essere incoerente, o viceversa, ma non può essere allo stesso tempo completo e coerente.

L'idea, condivisa da molti, che emerge da questa breve discussione è che esista un limite alla nostra capacità di produrre risposte, e quindi alla nostra capacità di costruire una "teoria del tutto". Ci sarà sempre una domanda nella forma "perchè è così?" a cui dovremo rispondere "è cosi perchè la realtà matematica è fatta così". Ad esempio, una domanda del genere è "perchè 317 è un numero primo?".[11] In sintesi, pretendere risposte esplicative a qualsiasi quesito e giudicare qualcuno (o un suo modello) sulla base dell'assenza di una risposta è un atteggiamento pericolosamente ingenuo e anche molto presuntuoso, perchè, sempre per usare le parole di Hawking, significa pretendere di "comprendere la mente di Dio". Ne comprendiamo solo alcuni pezzi, quando qualcuno di noi scopre una verità matematica che è sempre stata lì in attesa.

[11] A questo proposito, si veda Hardy (1940). Hardy sostiene di essersi occupato della teoria dei numeri primi *anche perchè* è talmente astratta da non avere alcuna possibile applicazione bellica. Purtroppo (anche se molto tempo dopo la scomparsa di Hardy) questo si è rivelato falso. I numeri primi sono ora alla base del più moderno sistema di crittografia, che evidentemente si presta ad impieghi bellici, così come a tanti altri (Singh, 1999).

Quindi, essendoci liberati del fardello del mondo reale, resta da stabilire che cosa possiamo far dire ad un modello. Questo è il compito della *logica*, che governa le regole della matematica.

Un esempio di questo controllo (o meglio, della sua mancanza) è la discussione sul modello di Cournot-Stackelberg pre-Nash fino a Fellner (1949), menzionato nel paragrafo precedente. Le congetture riguardo la possibilità che i giocatori si spostino al di fuori delle rispettive funzioni di reazione violano la *common knowledge*, a meno che una possibilità del genere non sia inclusa *ab initio* nelle regole che fanno parte della *common knoweldge* stessa. Si noti, inoltre, che la scelta del *timing* alla Hamilton e Slutsky (1990) avviene in un tempo fittizio (che non a caso si chiama meta-tempo) esterno al tempo del gioco (che è reale solo nell'accezione matematica accettabile all'interno del modello, non nel senso comune del termine). Se uno dei giocatori usa la funzione di reazione dell'altro, non muove prima, ma fa semplicemente un uso, appunto, strategico di un'informazione che fa parte del patrimonio di conoscenze comuni, senza tuttavia modificare il concetto di equilibrio.

Questo ragionamento porta a concludere che l'equilibrio di Stackelberg è un particolare equilibrio di Nash, non un'altra cosa. La presenza di mosse collocate in istanti diversi del tempo reale (inteso questa volta nel senso comune del termine) implicherebbe un qualche profitto di monopolio, che nel modello non si vede. Quindi, di fatto, l'equilibrio di Stackelberg è simultaneo, con l'ulteriore qualifica relativa alla nozione che le regole del gioco devono includere la possibilità per uno dei due di inglobare nel proprio problema di ottimo la condizione di primo ordine dell'altro, la quale peraltro è in ogni caso inclusa nella *common knowledge*.

Lo stesso vale per il presunto processo di aggiustamento. L'unica considerazione che abbia senso, al riguardo, è quella che concerne la cosiddetta stabilità asintotica dell'equilibrio di Cournot-Nash a seguito di una piccola perturbazione che faccia uscire almeno uno dei giocatori dall'intersezione delle funzioni di reazione. Questo, però, è un procedimento logico che permette di affermare che, se la perturbazione è considerata *ex ante* nelle possibili configurazioni del gioco, allora l'inclinazione relativa delle funzioni di reazione è tale da ristabilire l'equilibrio. Ma non è possibile che i giocatori, stanti il patrimonio di *common knowledge* e la loro razionalità massimizzante con informazione completa, si sbaglino e poi operino un qualsiasi aggiustamento.

Si noti che analoghe considerazioni valgono anche in merito al (presunto) ruolo dell'*auctioneer* (banditore) nel modello di equilibrio economico generale di Walras (1874), così come per la critica di Bertrand a Cournot. Si pensi al modello di Walras. Se gli agenti operano in condizioni di informazione perfetta, com'è possibile che occorra un banditore per aggiustare il vettore dei prezzi in modo da eliminare ogni eccesso di domanda o di offerta? Si passi ora al dibattito a distanza tra Cournot e Bertrand. La ben nota critica di quest'ultimo al modello in cui le imprese fissano la quantità e poi 'leggono' il prezzo di equilibrio sulla funzione di domanda, è che siccome non c'è nessuno che fissi i prezzi, c'è bisogno di un banditore per 'chiudere' il modello. In realtà questa critica è infondata. In condizioni di informazione completa, le imprese conoscono le funzioni di domanda per i propri prodotti, così come la funzione di domanda dell'intero mercato. Non solo, conoscono anche la primitiva di tali funzioni, cioè la funzione di utilità dei consumatori, la cui massimizzazione vincolata genera le funzioni di domanda che le imprese usano per scrivere le proprie funzioni di profitto. Quindi, come è possibile che non sappiano quali sono i prezzi di equilibrio? Devono necessariamente conoscerli in base alle ipotesi di partenza. Semmai, ciò che è discutibile è l'assunto di informazione completa, almeno nella componente che riguarda la precisa struttura delle preferenze dei consumatori.[12]

Tutto questo ci trasmette un messaggio:

Esistono tre parole chiave nell'attività scientifica: la prima è rigore, la seconda è rigore, la terza è rigore.

6 Sull'isomorfismo tra economia matematica e fisica quantistica

La fisica (e il suo sottoinsieme, cioè la meccanica) quantistica si può considerare, approssimativamente (non tutti i fisici sono d'accordo su questo), come una generalizzazione della fisica (e della meccanica) newtoniana. In particolare, quando i fenomeni considerati avvengono in assenza di velocità prossime a quelle della luce, o in assenza di forti campi gravitazionali, o le loro dimensioni non sono nè troppo piccole nè troppo grandi, si può tranquillamente procedere secondo il modello newtoniano. Tuttavia, in particolare quando sono coinvolte le componenti di base della materia, i fenomeni quantistici diventano così rilevanti da non poter essere trascurati. Per comprendere tale

[12] Questa è esattamente la prospettiva scelta da Singh e Vives (1984), i quali suppongono che le imprese, pur ottimizzando rispetto a prezzi o quantità, offrano poi ai consumatori dei 'contratti' consistenti in pacchetti prezzo-quantità. Per una efficace discussione della letteratura connessa all'evoluzione della teoria dell'oligopolio, si veda Daughety (1988).

punto, si può considerare il cosiddetto *paradosso del gatto di Schroedinger*, di cui quella che segue è una versione rappresentativa tra le tante ricorrenti in letteratura.[13]

Questo paradosso si riferisce ad un esperimento, in cui un gatto viene legato di fronte ad una pistola carica, il cui grilletto è a sua volta legato ad una corda che parte da un rilevatore di fotoni. Vicino al rilevatore è posta una fonte di luce che emette un singolo fotone ogni volta che lo sperimentatore preme l'interruttore. Se lo spin del fotone è positivo, il rilevatore tira la fune e quindi fa sparare la pistola che uccide il gatto. Se lo spin è negativo, non succede niente ed il gatto resta vivo. Il paradosso si verifica nella mente dello sperimentatore prima che l'esperimento abbia effettivamente luogo. Lo sperimentatore sa che, *ex post*, il gatto sarà vivo o morto con certezza. Ma, *ex ante*, i due stati del sistema (cioè, "gatto vivo" - "gatto morto"), così come i due stati del mondo (che si possono scrivere come "la pistola ha sparato perchè lo spin era positivo" e "la pistola non ha sparato perchè lo spin era negativo") coesistono. Tale paradosso si può verificare anche *ex post*, a condizione che lo sperimentatore non sia in grado di rilevare lo stato del gatto dopo che il fotone è stato emesso (ad esempio, perchè il gatto e la pistola si trovano in una scatola opaca e insonorizzata). Ma procediamo con ordine, formalizzando debitamente l'esperimento. Introduciamo la seguente definizione:

Definizione 1 Sia $\psi \equiv \{gv, gm\}$ la funzione d'onda o vettore di stato del sistema (il gatto).

Nella Definizione 1, intuitivamente, $gv =$"gatto vivo"; $gm =$"gatto morto". Inoltre, introduciamo la

Definizione 2 Sia $\vartheta \equiv \{ps, pns\}$ il vettore di stato del mondo.

Nella Definizione 2, intuitivamente, $ps =$"la pistola ha sparato (perchè lo spin era positivo)"; $pns =$"la pistola non ha sparato (perchè lo spin era negativo)".

Infine, abbiamo la

[13] Erwin Scroedinger, contemporaneo di Bohr, Einstein, Dirac, Heisenberg e Pauli, fu uno dei padri della teoria dei quanti. L'esposizione che segue è tratta da Hawking e Penrose (1996) e Penrose (1997). Per approfondimenti, si rimanda a Sakurai (1985), Schwabl (1992), Onofri e Destri (1996).

Definizione 3 Sia $\varphi \equiv \{gv, gm\}$ il vettore di stato dello sperimentatore.

Il motivo per cui (apparentemente) φ coincide con la funzione d'onda ψ diverrà chiaro nel seguito. La sovrapposizione degli stati del sistema *ex ante* è rappresentata dal *vettore di stato totale del sistema*:

$$|\psi_{tot}\rangle = \omega|gv\rangle + \rho|gm\rangle \tag{3}$$

dove ω e ρ sono numeri complessi e il simbolo $|\cdot\rangle$ si chiama *ket*. Il simbolo complementare $\langle\cdot\,|$ si chiama *bra*, e la loro combinazione $\langle\cdot\,|\cdot\rangle$ è definita *Dirac's brackets*, cioè parentesi di Dirac, dal nome del fisico inglese che le ha introdotte (Dirac, 1958[4]). Nel momento in cui lo sperimentatore osserva lo stato del sistema *ex post* (o apre la scatola) avviene quello che in fisica è definito *collasso della funzione d'onda* ψ, oppure *riduzione del vettore di stato* $|\psi_{tot}\rangle$, cosicchè lo sperimentatore osserva gv oppure gm, ma senza dubbio non entrambi gli stati contemporaneamente. Al contrario, fintantochè l'esperimento non viene effettuato (o finchè l'osservatore non apre la scatola), i due stati *coesistono in senso quantistico.*[14] Per motivi su cui non indaghiamo in questa sede, i numeri ω e ρ sono complessi, cioè contengono una parte reale ed una immaginaria. In particolare, ciò che ci interessa è l'informazione secondo cui i moduli (cioè le parti reali) di ω e ρ sono entrambi pari a $1/\sqrt{2}$. Elevandoli al quadrato si ottiene $1/2$, che è la probabilità che il fotone abbia spin di un segno piuttosto che dell'altro. Questo, come vedremo, ha implicazioni rilevanti per quanto riguarda il nostro obiettivo finale, che è dimostrare che esiste un isomorfismo tra la fisica quantistica e l'economia matematica (in generale, e la teoria dei giochi in particolare). Il vettore di stato totale dello sperimentatore sarà definito in modo analogo (ma, sottolineo, *non identico*) a quello del sistema:

$$\langle\varphi_{tot}| = \omega\langle gv| + \rho\langle gm| \ , \ \omega = \rho = 1/\sqrt{2}\ . \tag{4}$$

In termini probabilistici, la conoscenza *ex ante* che lo sperimentatore possiede nei confronti degli stati del sistema *ex post* è riassunta dalla cosiddetta *matrice densità*:

$$D = \frac{1}{2}|gv\rangle\langle gv| + \frac{1}{2}|gm\rangle\langle gm|\ , \tag{5}$$

[14] I fisici discutono animatamente sulle alternative al riguardo, vale a dire se gli stati gv e gm coesistano in universi paralleli o nella mente dello sperimentatore. Ai nostri fini questa distinzione può essere ignorata.

ovvero è il risultato del prodotto scalare dei due vettori di stato totali, vale a dire $|\psi_{tot}\rangle \cdot \langle\varphi_{tot}|$. L'introduzione dell'operatore matrice densità è attribuibile a Dirac (1958[4]) e ricompare in von Neumann (1932 [1955]). Non è quindi un caso che vi sia un isomorfismo tra la teoria dell'utilità attesa e i fondamenti matematici della meccanica quantistica. In *Theory of Games and Economic Behavior*, von Neumann usa uno strumentario mutuato dal modello matematico che Dirac aveva approntato per la meccanica quantistica, e che von Neumann, insoddisfatto della formalizzazione originale di Dirac, aveva perfezionato.[15] A quanto pare, von Neumann semplicemente non si curò di segnalarlo ai propri colleghi nei due campi.

La (5) si può riscrivere in forma equivalente come segue:

$$D = \frac{1}{2}\langle gv|gv\rangle + \frac{1}{2}\langle gm|gm\rangle \ , \tag{6}$$

da cui appare chiara l'anlogia con quello che in economia si chiama valore atteso. Infatti, $\omega^2 = \rho^2 = 1/2$ sono le probabilità che il fotone abbia un certo spin tra i due che sono possibili, e quindi la matrice densità non è altro che il valore atteso dell'esperimento, che un economista scriverebbe così:

$$E(esp) = \frac{1}{2}(\text{osservo } gv \mid gv) + \frac{1}{2}(\text{osservo } gm \mid gm) \tag{7}$$

e che si legge, in parole, nello stesso modo in cui si legge la (6), cioè "osserverò con probabilità 1/2 un gatto morto perchè è morto (ovvero, perchè la pistola ha sparato in quanto lo spin era positivo), e con probabilità 1/2 un gatto vivo perchè è vivo (ovvero, perchè la pistola non ha sparato in quanto lo spin era negativo)". Si osservi che il significato del simbolo | in parentesi è esattamente lo stesso ("dato che") in entrambi i casi; vale a dire, le due formalizzazioni sono equivalenti. Questo è quanto accade quando risolviamo un gioco in strategie miste.[16] Naturalmente si potrebbe complicare la simbologia fino ad includere il vettore degli stati del mondo, ϑ, ma siccome non

[15] Lo stesso von Neumann motiva la propria incursione nella fisica quantistica sulla base della propria insoddisfazione riguardo il lato formale del trattato di Dirac. Su questo, rimando direttamente alla prefazione di von Neumann (1932 [1955]).

[16] Le stesse discussioni che avvengono tra economisti a proposito del senso da attribuire all'equilibrio di Nash in strategie miste in opposizione a quello in strategie pure, avvengono anche tra i fisici a proposito della credibilità delle descrizioni quantistiche come quella che abbiamo appena offerto, contrapposte alla visione newtoniana o deterministica del mondo. Queste diatribe risalgono ad una famosa discussione tra Niels Bohr e Albert Einstein, il quale, pur essendo uno dei padri (nel suo caso, involontariamente) della teoria dei quanti,

è necessario eviterò di dilungarmi, limitandomi a riscrivere la (7) usando ϑ al posto di ψ :

$$E(esp) = \frac{1}{2}(\text{osservo } gv \mid pns) + \frac{1}{2}(\text{osservo } gm \mid ps) \ . \tag{8}$$

Infine, voglio sottolineare che nel caso di un modello economico in cui si costruisca il valore atteso relativo, ad esempio, al *payoff* di un giocatore, si verifica esattamente lo stesso tipo di paradosso legato al processo di riduzione del vettore di stato nel caso del gatto di Schroedinger, e si verifica nella mente dell'osservatore. Quindi, anche nel caso di un problema di natura economica il problema è il processo di riduzione, cioè il passaggio dalla situazione quantistica (previsiva) *ex ante* a quella newtoniana (osservativa) *ex post*. In entrambe le situazioni, il paradosso avviene nella nostra mente, perchè, si osservi, il modello quantistico e quello newtoniano da un lato e gli equilibri in strategie miste ed in strategie pure, dall'altro, sono entrambi privi di incertezze e perfettamente noti. Ciò che non controlliamo è il grado di **indeterminazione**[17] implicito nel processo di misurazione nel caso della fisica e nel passaggio da una combinazione delle strategie pure in una strategia mista alla selezione (casuale) di una particolare strategia pura.[18]

L'analogia con situazioni ben note in teoria dei giochi è immediata. Si consideri il seguente gioco in forma normale.

sosteneva che "Dio non gioca a dadi". Per una versione moderna di questa discussione, si rimanda il lettore interessato a Hawking e Penrose (1996), con Hawking nel ruolo che fu di Bohr e Penrose in quello che fu di Einstein.

[17] Il *principio di indeterminazione* di Werner Heisenberg si può raccontare in parole povere dicendo che, ad esempio, non possiamo conoscere contemporaneamente la velocità e la posizione di un elettrone. Questo è, disgraziatamente, il fardello di qualsiasi esperimento quantistico in cui siano coinvolti corpi troppo piccoli e nello stesso tempo troppo veloci rispetto alle nostre capacità di misurazione.

[18] É importante sottolineare che la linea interpretativa che ho appena esposto non modifica la visione acquisita della genesi della teoria dell'utilità attesa (si veda, ad esempio, Fishburn e Wakker, 1995). Piuttosto, mette in evidenza l'analogia tra due discipline, attraverso l'attività di von Neumann, che ha avuto un ruolo centrale in entrambe.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & B & \\
 & & s & d \\
A & a & \pi_A(a,s),\pi_B(s,a) & \pi_A(a,d),\pi_B(d,a) \\
 & b & \pi_A(b,s),\pi_B(s,b) & \pi_A(b,d),\pi_B(d,b)
\end{array}
$$

Matrice 3

In generale, il gioco rappresentato nella matrice 3 avrà almeno un equilibrio di Nash in strategie miste. Definiamo con α la probabilità che il giocatore A scelga la strategia a, e con β la probabilità che il giocatore B scelga s. Ovviamente, le probabilità che b e d vengano scelte sono, rispettivamente, $1-\alpha$ e $1-\beta$. Siamo in grado di scrivere il valore atteso del payoff spettante, ad esempio, al giocatore A :

$$
\begin{aligned}
E(\pi_A) \quad = \quad & \alpha\beta\pi_A(a,s) + \alpha(1-\beta)\pi_A(a,d) + \\
& (1-\alpha)\beta\pi_A(b,s) + (1-\alpha)(1-\beta)\pi_A(b,d)\ , \qquad (9)
\end{aligned}
$$

che dovrà essere massimizzato da A rispetto ad α. Analoghe consideariconi valgono per B. Nel linguaggio dei fisici quantistici, l'espressione (9) si potrebbe definire come la *matrice densità del gioco* per l'individuo A. La (9) si potrebbe riscrivere così:

$$
\begin{aligned}
D(\pi_A) \quad = \quad & \alpha\beta\langle\pi_A(a,s)|s\rangle + \alpha(1-\beta)\langle\pi_A(a,d)|d\rangle + \\
& (1-\alpha)\beta\langle\pi_A(b,s)|s\rangle + (1-\alpha)(1-\beta)\langle\pi_A(b,d)|d\rangle\ . \qquad (10)
\end{aligned}
$$

A questo punto siamo arrivati dove volevamo, e tutto ciò che possiamo fare in più non è che qualche (sia pur interessante, ma non sostanziale) estensione. Ad esempio, si potrebbe obiettare che in un gioco le probabilità vengono scelte dai giocatori per massimizzare il proprio *payoff* atteso, mentre in un esperimento quantistico tali probabilità sono dettate dalla Natura. Rimediare a questo è immediato, basta pensare al modello dei 'bidoni' (*lemons*) di Akerlof (1970) e ai giochi illustrati in Bassan, Scarsini e Zamir (1997), o, più in generale, ai giochi ad informazione incompleta (Harsanyi, 1967), in cui gli stati del mondo si presentano secondo una certa distribuzione di probabilità dettata dalla Natura.

A titolo di esempio, si consideri la ormai familiare parabola delle auto usate (Akerlof, 1970). Un individuo intenzionato ad acquistare un'auto di seconda mano fronteggia una popolazione di venditori, ciascuno dei quali offre un'auto, la quale può essere alternativamente di qualità $q = H$ o $q = L$ ($H > L$), con probabilità $p(H) = p(L) = 1/2$. La metafora solitamente usata per raccontare la vicenda è che la natura estrae a caso dalla popolazione di venditori un individuo qualsiasi. Quindi, a priori, l'acquirente potenziale è in grado di calcolare il valore atteso della qualità $E(q) = (H + L)/2$. Questo nell linguaggio di un economista, mentre in quello di un fisico tale espressione sarebbe definita come la matrice densità della qualità:

$$D(q) = \frac{1}{2}\langle H|H\rangle + \frac{1}{2}\langle L|L\rangle \ , \tag{11}$$

vale a dire: con probabilità 1/2, l'auto che acquisterà sarà di qualità alta, e con la stessa probabilità sarà di qualità bassa.[19] Il che, nella valutazione attesa si traduce nella sovrapposizione dei due stati (o qualità) in senso quantistico. Il collasso di tale sovrapposizione avviene all'atto dell'acquisto, che è l'equivalente dell'apertura della scatola nell'esperimento del gatto di Schroedinger.

Per chiudere, è opportuna una breve considerazione di carattere terminologico. Nel linguaggio dei fisici l'etichetta *valore atteso* viene usata esclusivamente nella sua accezione originale (cioè statistica), per indicare la media di una distribuzione, mentre un concetto più complesso come lo stato atteso di un sistema (a esempio, il gatto) viene trattato coniando una seconda etichetta che è un derivato della prima, cioè la matrice densità.[20] Tra gli economisti questa distinzione scompare, e si assiste da sempre all'uso generalizzato di *valore atteso* sia nel primo che nel secondo caso.

[19] Peraltro, come è noto, a questa valutazione attesa della qualità è associato il fallimento del mercato delle auto usate a causa di un fenomeno di *adverse selection*.

[20] Nell'edizione originale in tedesco, von Neumann (1932) usa il termine *Erwartungswert*, che in inglese diventa *expectation value*, ed in italiano, in tutti i testi di fisica (Schwabl, 1992; Onofri e Destri, 1996), *valore di aspettazione*. Nella terminologia economica, l'equivalente inglese è *expected value*, che in italiano diventa *valore atteso*.

Bibliografia

Ristretta:

1] Per il teorema del punto fisso:

- Nikaido, H. (1987), "Fixed Point Theorems", in Eatwell, J., M. Milgate e P. Newman (a cura di), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, London, Macmillan.

2] Per il teorema del minimax e l'equilibrio di Nash:

- Osborne, M. e A. Rubinstein (1994), *A Course in Game Theory*, Cambridge, Mass., MIT Press.
- Kreps, D. (1987), "Nash Equilibrium", in Eatwell, J., M. Milgate e P. Newman (a cura di), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, London, Macmillan.

3] Per la collocazione di John von Neumann e John Nash all'interno dell'evoluzione dell'economia matematica:

- Leonard, R.J. (1994), "Reading Cournot, Reading Nash: The Creation and Stabilisation of the Nash Equilibrium", *Economic Journal*, **104**, 492-511.
- Leonard, R.J. (1995), "From Parlor Games to Social Science: von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory", *Journal of Economic Literature*, **33**, 730-761.

4] Per il dibattito sulla plausibilità del concetto di soluzione di Nash-Cournot-Stackelberg:

- d'Aspremont, C. and L.-A. Gérard-Varet (1980), "Stackelberg-Solvable Games and Pre-Play Communication", *Journal of Economic Theory*, **23**, 201-217.
- Dowrick, S. (1986), "von Stackelberg and Cournot Duopoly: Choosing Roles", *RAND Journal of Economics*, **17**, 251-260.
- Fellner, W. (1949), *Competition among the Few*, New York, Kelly.

- Hamilton, J.H. and S.M. Slutsky (1990), "Endogenous Timing in Duopoly Games: Stackelberg or Cournot Equilibria", *Games and Economic Behavior*, **2**, 29-46.

- Varian, H. (1978^1, 1984^2, 1992^3), *Microeconomic Analysis*, New York, Norton.

- von Stackelberg, H. (1934), *Marktform und Gleichgewicht*, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.

5] Per il paradosso del gatto di Schroedinger e per i concetti di equazione d'onda, vettore di stato e matrice densità:

- Hawking, S. e R. Penrose (1996), *The Nature of Space and Time*, Princeton, NJ, Princeton University Press; trad. it. *La natura dello spazio e del tempo*, Sansoni, Milano, 1996.

- Penrose, R. (1997), *The Large, the Small and the Human Mind*, Cambridge, Cambridge University Press; trad. it. *Il grande, il piccolo e la mente umana*, Raffaello Cortina Editore, Milano, 1997.

- Sakurai, J.J. (1985), *Modern Quantum Mechanics. Revised Edition*, New York, Addison-Wesley.

- Schwabl, F. (1992), *Quantum Mechanics*, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag; trad. it.: *Meccanica quantistica*, Zanichelli, Bologna, 1995.

- von Neumann, J. (1932), *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg; trad. inglese: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton, NJ, Princeton University Press, 1955; trad. it.: *I fondamenti matematici della meccanica quantistica*, Il Poligrafo, Padova, 1998.

6] Per i giochi ad informazione incompleta:

- Bassan, B., M. Scarsini e S. Zamir (1997), "I Don't Want to Know! Can It Be Rational?" discussion paper n. 158, Center for Rationality and Interactive Decision Theory, The Hebrew University of Jerusalem.

- Harsanyi, J. (1967), "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, Part I, II and III", *Management Science*, **14**, 159-182, 324-334, 486-502.

- Osborne, M. e A. Rubinstein (1994), *A Course in Game Theory*, Cambridge, Mass., MIT Press.

Estesa:

- Akerlof, G. (1970), "The Market for Lemons: Quality Uncertainty and the Market Mechanism", *Quarterly Journal of Economics*, **84**, 488-500.
- Aumann, R.J. (1976), "Agreeing to Disagree", *Annals of Statistics*, **4**, 1236-1239.
- Aumann, R.J. (1985), "What Is Game Theory Trying to Accomplish?", in Arrow, K., e S. Honkapohja (a cura di), *Frontiers in Economics*, Oxford, Blackwell.
- Aumann, R.J. (1987), "Game Theory", in Eatwell, J., M. Milgate e P. Newman (a cura di), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, London, Macmillan.
- Aumann, R.J. (1999), "Game Theory in Israel: Looking Backward and Forward", paper presentato alla Conferenza ASSET99, Tel Aviv, 10-11 ottobre 1999.
- Başar, T. e G.J. Olsder (1982, 1995^2), *Dynamic Noncooperative Game Theory*, San Diego, Academic Press.
- Binmore, K. e A. Brandenbunger (1990), "Common Knowledge and Game Theory", in Binmore, K. (a cura di), *Essays on the Foundations of Game Theory*, Oxford, Blackwell.
- Brouwer, L. (1910), "Über eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich", *Mathematische Annalen*, **69**, 176-180.
- Daughety, A.F. (1988, a cura di), *Cournot Oligopoly: Characterization and Applications*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Dirac, P.A.M. (1958^4), *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, Oxford University Press.

- Einstein, A. e L. Infeld (1938), *The Evolution of Physics. The Growth of Ideas from Early Concepts to Relativity and Quanta*, New York, Simon & Schuster; trad. it. *L'evoluzione della fisica. Dai concetti iniziali alla relatività e ai quanti*, Bollati Boringhieri, Torino, 1965.

- Fishburn, P. e P. Wakker (1995), "The Invention of the Independence Condition for Preferences", *Management Science*, **41**, 1130-1144.

- Fudenberg, D. e J. Tirole (1991), *Game Theory*, Cambridge, Mass., MIT Press.

- Geanakoplos, J. (1994), "Common Knowledge", in Aumann, R.e S. Hart, (a cura di), *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, vol. 2, Amsterdam, North-Holland.

- Gödel, K. (1931), "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter System", *Monatschefte für Mathematik und Physik*, 38, 173-198.

- Hardy, G.H. (1940), *A Mathematician's Apology*, Cambridge, Cambridge University Press; trad. it. *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano, 1989.

- Hawking, S. (1988), *A Brief History of Time*, New York, Bantam Books; trad. it. *Dal big bang ai buchi neri*, Rizzoli, Milano, 1988.

- Hawking, S. (1992), *Is the End in Sight for Theoretical Physics?*, Cambridge, Cambridge University Press; trad. it. *Inizio del tempo e fine della fisica*, Mondadori, Milano, 1992.

- Isaacs, R. (1954), "Differential Games, I, II, III, IV", Reports RM-1391, 1399, 1411, 1486, RAND Corporation.

- Isaacs, R. (1965), *Differential Games*, New York, Wiley.

- Kakutani, S. (1941), "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem", *Duke Mathematical Journal*, **8**, 457-459.

- Kuhn, H.W. (1953), "Extensive Games and the Problem of Information", in Kuhn, H.W. e A.W. Tucker (a cura di), *Contributions to the Theory of Games*, vol. 2, Princeton, NJ, Princeton University Press.

- Lewis, D.K. (1969), *Convention*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.
- Myerson, R. (1999), "Nash Equilibrium and the History of Economic Theory", *Journal of Economic Literature*, **37**, 1067-1082.
- Nasar, S. (1998), *A Beautiful Mind*, New York, Touchstone Books; trad. it. *Il genio dei numeri*, Rizzoli, Milano, 1999 (biografia di John F. Nash).
- Nash, J.F. (1950), "Equilibrium Points in n-Person Games", *Proceedings of the National Academy of Science of the USA*, **36**, 48-49.
- Nash, J.F. (1951), "Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics*, **54**, 289-295.
- Onofri, E., e C. Destri (1996), *Istituzioni di fisica teorica*, Carocci Editore, Roma.
- Pontryagin, L.S. (1966), "On the Theory of Differential Games", *Uspekhi Mat. Nauk*, **21**, 219-274.
- Selten, R. (1965), "Spielteoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit", *Zeitschrift für di gesamte Staatswissenschaft*, **121**, 301-324.
- Selten, R. (1975), "Re-Examination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games", *International Journal of Game Theory*, **4**, 25-55.
- Singh, N. and Vives, X. (1984), "Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly", *RAND Journal of Economics*, **15**, 546-554.
- Singh, S. (1999), *The Code Book*, New York, Doubleday; trad. it. *Codici e segreti*, Rizzoli, Milano, 1999.
- van Damme, E., e J. Weibull (1995), "Equilibrium in Strategic Interaction: The Contributions of John C. Harsanyi, John F. Nash and Reinhard Selten", *Scandinavian Journal of Economics*, **97**, 15-40.
- von Neumann, J. (1928), "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Matematische Annalen*, **100**, 295-320.

- von Neumann, J. (1937), "Über einökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, **8**.

- von Neumann, J. e O. Morgenstern (1944), *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, NJ, Princeton University Press.

- Walras, L. (1874), *Eléments d'économie politique pure*, Lousanne, Corbaz.

- Weintraub, R. (1992, a cura di), *Toward a History of Game Theory*, in *History of Political Economy*, **24** (Supplement), e tutti i lavori ivi raccolti.

- Zermelo, E. (1913), "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachsspiels", *Proceedings of the Fifth Congress of Mathematicians*, **2**, 501-504.