# Esistenza e caratterizzazione dell'equilibrio in modelli di competizione spaziale[¤]

Luca Lambertini
Dipartimento di Scienze Economiche
Strada Maggiore 45
40125 Bologna
tel. 051-6402623
fax 051-6402664
e-mail lamberti@spbo.unibo.it

Abstract

Questo lavoro presenta una sintesi dei principali risultati ottenuti dalla letteratura sulla di¤erenziazione spaziale, in termini di esistenza e caratterizzazione degli equilibri perfetti nei sottogiochi in mercati duopolistici in cui le imprese …ssano le collocazioni e i prezzi (o i livelli di produzione) dei rispettivi beni. Inoltre, vengono brevemente considerati i risultati prodotti sotto l'ipotesi che le imprese, nel determinare le caratteristiche dei propri prodotti, possano anche …ssarne il livello di qualità.

Classi…cazione JEL: L13

Parole chiave: di¤erenziazione orizzontale, duopolio, esistenza dell'equilibrio

[¤]Ringrazio i partecipanti ad un seminario tenuto presso la Facoltà di Economia dell'Università di Modena per utili commenti. La responsabilità di quanto scritto resta esclusivamente mia.

# 1 Introduzione

A partire dai contributi pionieristici di Hotelling (1929) e Chamberlin (1933), la formalizzazione dell'incentivo, da parte delle imprese, a di¤erenziare reciprocamente le proprie produzioni per ammorbidire la concorrenza di prezzo ha prodotto una letteratura estremamente vasta, che dimostra quale fosse il potenziale contenuto nell'idea originale di Hotelling attraverso uno spettro di applicazioni e di sviluppi quanto mai variegato.[1] Tuttavia, è il caso di rilevare che il problema che ha ricevuto la maggiore attenzione all'interno di questa letteratura è quello dell'esistenza dell'equilibrio e, per naturale estensione, della sua caratterizzazione. In particolare, il connotato saliente di questa linea di ricerca è quello di fornire, come rilevante sottoprodotto, una serie di principi di di¤erenziazione (o candidati a tale titolo), che dovrebbero farsi portatori della descrizione sintetica del comportamento delle imprese riguardo la scelta fondamentale che esse devono compiere nei modelli in questione.

In questa sede, mi limiterò a trattare i problemi di esistenza e caratterizzazione all'interno dei modelli più noti di di¤erenziazione spaziale e ad accennare le estensioni riguardanti alcune versioni di tali modelli che includano caratteristiche tipiche della di¤erenziazione orizzontale.[2]

Come vedremo nel corso della trattazione, questa letteratura è di natura piuttosto contraddittoria. Infatti, pur avendo prodotto risultati ragguardevoli e spesso dotati di un forte potere interpretativo nei confronti dei fenomeni del mondo reale, non ha raggiunto conclusioni che appaiano de…nitive, se non in misura limitata. La ricerca di un principio di di¤erenziazione che caratterizzi in modo stilizzato e intuitivo il comportamento delle imprese si è sostanzialmente rivelata infruttuosa, in quanto le conclusioni raggiunte permettono sì di a¤ermare che, in generale, le imprese sceglieranno di di¤erenziarsi reciprocamente in equilibrio, ma l'ammontare della di¤erenziazione e i criteri con cui essa verrà scelta dipenderanno drasticamente dalla speci…-

[1] Per rassegne esaurienti, che includano temi tipici dell'economia industriale quali ricerca e sviluppo, barriere all'entrata, discriminazione di prezzo ecc., rimando a Beath e Katsoulacos (1991), Gabszewicz e Thisse (1992) e Anderson, De Palma e Thisse (1992).

[2] Non tratterò il caso in cui il mercato possa risultare parzialmente scoperto quando il prezzo di riserva del consumatore generico è troppo basso da consentire una copertura totale del mercato, nè quello in cui i consumatori siano distribuiti lungo una circonferenza. Per quanto riguarda il primo, rimando il lettore interessato a Hinloopen e van Marrewijk (1999), ed ai riferimenti ivi citati. Per quanto riguarda il secondo, si veda Salop (1979) e Economides (1986a).

cazione del modello. Questo per quanto riguarda modelli unidimensionali; in modelli multidimensionali, un risultato apparentemente consolidato afferma che una sola dimensione verrà sfruttata completamente in equilibrio, mentre tutte le altre risulteranno superflue.

La struttura del lavoro è la seguente. Il paragrafo 2 propone i due teoremi fondamentali che legano l'esistenza dell'equilibrio nei prezzi (e dell'equilibrio perfetto nei sottogiochi in due stadi) nonchè l'ammontare di differenziazione osservato in equilibrio alle caratteristiche di curvatura dei costi di trasporto, vale a dire, della disutilità sopportata dai consumatori nell'acquistare beni diversi dai preferiti. Vengono sinteticamente messi in luce i motivi, legati alla struttura delle preferenze, alla base della non esistenza dell'equilibrio in strategie pure. Il paragrafo 3 illustra alcuni rimedi proposti dalla letteratura al problema della non esistenza. Il paragrafo 4 raccoglie le conclusioni principali riguardanti la possibilità di identificare un "principio di differenziazione" che abbia una validità sufficientemente generale. Infine, il paragrafo 5 propone alcune considerazioni conclusive e indica quali potrebbero essere gli indirizzi futuri di questa letteratura.

# 2 Il legame tra costo di trasporto e differenziazione

Un'idea consolidata nel campo della competizione spaziale è quella secondo cui l'ammontare di differenziazione determinato dalle scelte di equilibrio delle imprese dipende dalle preferenze dei consumatori, ed in particolare dal modo in cui il costo di trasporto entra nella definizione della funzione di utilità del consumatore generico. Hotelling (1929) considera una popolazione di consumatori, normalizzata ad uno, uniformemente distribuita su di un segmento unitario. Il mercato è servito da due imprese (1 e 2) che offrono un prodotto omogeneo in tutto tranne che per la collocazione lungo il segmento, $a$ per l'impresa 1 e $1-b$ per l'impresa 2, con $a \in [0, 1-b]$. Le imprese competono in un gioco a due stadi, il primo nelle collocazioni e il secondo nei prezzi. Ogni consumatore acquista una unità del bene, scegliendo l'impresa da cui è in grado di ottenere il surplus netto maggiore, dati i prezzi e le collocazioni. Il surplus netto di un generico consumatore che si trovi in $m \in [0, 1]$ è definito da:

$$U = s - p_i - t|d| \tag{1}$$

dove $s$ è il surplus lordo, $p_i$ è il prezzo di mercato praticato dall'impresa $i$ e $d$ è la distanza tra $m$ ed $a$ se $i = 1$; oppure tra $m$ ed $1 - b$ se $i = 2$. La posizione $\tilde{x}$ del consumatore indifferente tra le due imprese si ottiene risolvendo

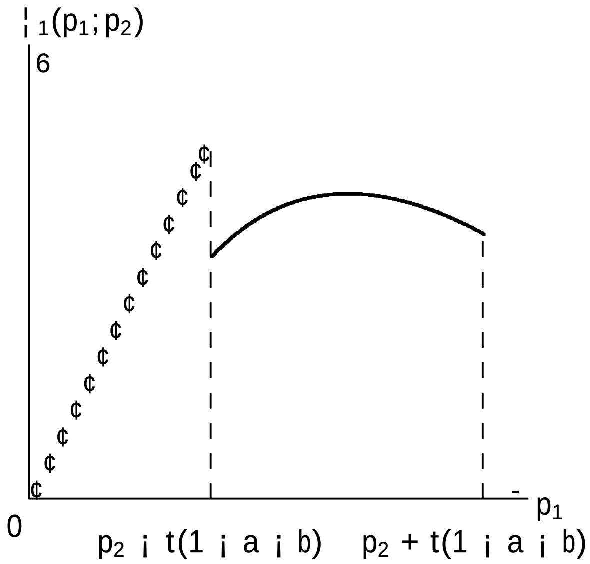
$$p_1 + t(\tilde{x} - a) = p_2 + t(1 - b - \tilde{x}) \tag{2}$$

ovvero $\tilde{x} = (p_2 - p_1 + t(1 - b + a))/(2t) \in [a, 1 - b]$ se e solo se $|p_2 - p_1| \leq t(1 - a - b)$. Questo è già sufficiente a far sospettare che l'esistenza dell'equilibrio nei prezzi sia tutt'altro che scontata. Data la simmetria del modello, possiamo limitarci a valutare la funzione di profitto dell'impresa 1, che è

$$\pi_1(p_1, p_2, a, b) = p_1 \frac{(p_2 - p_1 + t(1 - b + a))}{2t} \text{ se } |p_2 - p_1| \leq t(1 - a - b); \tag{3}$$

altrimenti è $\pi_1(p_1, p_2, a, b) = p_1$ se $p_1 < p_2 - t(1 - a - b)$, e infine è $\pi_1(p_1, p_2, a, b) = 0$ se $p_1 > p_2 + t(1 - a - b)$. La funzione obiettivo della generica impresa $i$ presenta quindi due discontinuità in corrispondenza di tutti quei prezzi ai quali i consumatori a sinistra (rispettivamente, a destra) della prima (rispettivamente, seconda) impresa sono indifferenti tra i due prodotti. Questo è illustrato nella figura 1, in relazione alle condizioni evidenziate sopra a proposito dell'impresa 1.

Figura 1. Funzione di profitto



Il seguente risultato stabilisce le condizioni necessarie e sufficienti su $a$ e $b$ per garantire l'esistenza dell'equilibrio nei prezzi, definito dalla coppia $(p_1^*, p_2^*)$, in strategie pure.

**Proposizione 1** (d'Aspremont et al., 1979) *Per $a = 1 - b$, l'unico equilibrio nei prezzi è $p_1^* = p_2^* = 0$. Per ogni $a \in [0, 1 - b)$, esiste un equilibrio nei prezzi, se e solo se*

$$\left(1 + \frac{a - b}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3}(a + 2b),$$

$$\left(1 + \frac{b - a}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3}(2a + b)$$

*Quando esiste, tale equilibrio è unico.*

**Dimostrazione** La soluzione del gioco in due stadi si ottiene per induzione a ritroso. Dalle condizioni di primo ordine relative allo stadio di mercato, si ottiene la seguente coppia di prezzi, candidati all'equilibrio di Nash del secondo stadio:

$$p_1^*(a, b) = t\left(1 + \frac{a - b}{3}\right), \quad p_2^*(a, b) = t\left(1 - \frac{a - b}{3}\right). \tag{4}$$

Sostituendoli nella (3) e semplificando, si ricavano le funzioni di profitto definite unicamente in termini delle collocazioni:

$$\pi_1(a, b) = \frac{t}{2}\left(1 + \frac{a - b}{3}\right)^2, \quad \pi_2(a, b) = \frac{t}{2}\left(1 - \frac{a - b}{3}\right)^2. \tag{5}$$

Si consideri ora il prezzo $p_i = p_j^* - t(1 - a - b) - \varepsilon$, con $\varepsilon$ positivo e piccolo a piacere. Data questa combinazione di prezzi, l'impresa $i$ diventa monopolista con profitti pari a $\pi_i^m = p_j^* - t(1 - a - b) - \varepsilon$. Al tendere a zero di $\varepsilon$, è immediato verificare che i prezzi (4) sono effettivamente di equilibrio se e solo se

$$\left(1 + \frac{a - b}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3}(a + 2b), \tag{6}$$

$$\left(1 + \frac{b - a}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3}(2a + b). \tag{7}$$

Questo conclude la dimostrazione. ■

Si può interpretare la proposizione 1 nei seguenti termini. Se le imprese sono troppo vicine (in particolare, se si trovano entro l'intervallo $[1/4, 3/4]$) l'incentivo ad abbassare il prezzo in misura sufficiente a monopolizzare il mercato distrugge l'esistenza di qualsiasi equilibrio in cui i prezzi siano strettamente positivi.[3]

Il segno di $\partial \pi_1/\partial a$ e $\partial \pi_2/\partial b$ indica immediatamente che le imprese convergono verso il centro del segmento. Questo aveva indotto Hotelling a formulare il cosiddetto principio di minima differenziazione, ma l'argomento esposto sopra rivela che le imprese, muovendosi verso 1/2, entrano nella zona in cui l'equilibrio in strategie pure con prezzi strettamente positivi non esiste. Naturalmente questo implica, come conseguenza diretta, che non esiste nemmeno l'equilibrio perfetto nei sottogiochi. La convessificazione dei costi di trasporto può rappresentare un rimedio a questo problema. In particolare, d'Aspremont et al. (1979) assumono che la disutilità sia $td^2$: Sotto questa ipotesi, l'equilibrio nei prezzi esiste sempre in tutto l'intervallo unitario, e gli autori, sulla base dei segni delle derivate prime delle funzioni di profitto al primo stadio, derivano quello che è noto come principio di massima differenziazione:

**Proposizione 2 (d'Aspremont et al., 1979)** Con costi di trasporto quadratici, le collocazioni di equilibrio delle imprese sono gli estremi del segmento unitario.

La dimostrazione dettagliata di questo risultato è omessa, in quanto fin troppo nota. E' sufficiente sottolineare l'intuizione su cui si regge. Anticipando la competizione di prezzo che avrà luogo nello stadio successivo, le imprese scelgono le proprie collocazioni tenendo conto di due effetti di segno opposto. Il primo è un effetto di domanda, che spinge le imprese verso il centro del segmento. Il secondo è un effetto strategico, che induce le imprese ad allontanarsi l'una dall'altra per cercare di ammorbidire la competizione di prezzo successiva. La prevalenza di quest'ultimo produce il risultato di

[3] L'equilibrio nei prezzi esiste in strategie miste (Dasgupta e Maskin, 1986; Osborne e Pitchik, 1987).

massima differenziazione, mentre esattamente l'opposto avviene nel modello originale di Hotelling con costi di trasporto lineari.

Tuttavia, si può dimostrare che il risultato di d'Aspremont et al. (1979) è in realtà un caso particolare, e che per ottenerlo non è necessario usare costi quadratici: se la funzione che descrive il costo di trasporto è $td^n$; con $n \in [1; 2]$; allora vale la seguente

**Proposizione 3 (Economides, 1986b)** Per ogni $n \in [1; 5/4]$ l'equilibrio nei prezzi in strategie pure non esiste se le imprese sono troppo vicine; per ogni $n \in (5/4; 5/3)$, tale equilibrio esiste ed è unico, e il gioco possiede un equilibrio perfetto nei sottogiochi in cui le imprese si collocano in $(0; 1)$; infine, per ogni $n \in [5/3; 2]$ il gioco possiede un unico equilibrio perfetto nei sottogiochi, in cui le imprese si collocano in 0 e in 1, rispettivamente.

A partire da questo quadro iniziale, la letteratura ha preso varie direzioni, nel tentativo (i) di identificare altri rimedi al problema di non esistenza che affliggeva il modello di Hotelling originale, e (ii) di verificare l'eventuale validità generale del principio di massima differenziazione, le cui implicazioni economiche apparivano molto attraenti e immediate. Senza dubbio, la prima direzione è stata più fruttuosa della seconda.

# 3 I rimedi

Anderson (1987) riprende il modello con costi lineari e analizza i casi in cui almeno uno dei due stadi venga giocato in modo sequenziale, cioè considera la possibilità che le imprese giochino alla Stackelberg nelle collocazioni o nei prezzi o in entrambi gli spazi. Questo ristabilisce l'esistenza dell'equilibrio perfetto nei sottogiochi, con le opportune qualificazioni. Nel caso in cui le imprese muovano sequenzialmente nello stadio delle collocazioni, si può immaginare che la giustificazione risieda nel fatto che entrano nel mercato in istanti diversi. I risultati sono riassunti dalla

**Proposizione 4 (Anderson, 1987)** La prima impresa che entra nel mercato si colloca in 1/2, la seconda in prossimità di un estremo (0.131 o 0.869). La seconda impresa preferisce essere leader nei prezzi, mentre la prima preferisce essere follower. Quando le imprese giocano simultaneamente nello stadio delle collocazioni e sequenzialmente in quello dei prezzi, esiste un continumm di equilibri nello stadio delle collocazioni.

Il continuum di equilibri che si osserva quando lo stadio delle collocazioni è simultaneo è dovuto al fatto che la strategia dell'impresa i consiste nel fissare il prezzo ad un livello in corrispondenza del quale l'impresa j è appena dissuasa dal fare undercutting, cioè dal rubare l'hinterland della rivale. La preferenza del leader nelle collocazioni per la followership nella fase di prezzo è dovuta al cumularsi di effetti di domanda nel primo e nel secondo stadio.

Una strada alternativa è quella di considerare un diverso spazio delle strategie, ed una diversa funzione di costo di trasporto. Gabszewicz e Thisse (1986) assumono che la funzione che descrive il costo di trasporto sia $c(d) = rd^2 + t|d|$; vale a dire una somma ponderata delle funzioni alternativamente assunte nel resto della letteratura. Inoltre, considerano due casi alternativi, che etichettano come modello orizzontale e modello verticale. Il primo prevede che le imprese possano muoversi all'interno dell'intervallo unitario, il secondo suppone che le imprese si collochino entrambe all'esterno dell'intervallo, e dallo stesso lato. Quest'ultimo si propone come un prototipo di differenziazione verticale, in quanto a parità di prezzo tutti i consumatori, che sono uniformemente distribuiti sull'intervallo unitario in entrambi i casi, preferirebbero il prodotto offerto dall'impresa più vicina.

Nel modello orizzontale vale la seguente

**Proposizione 5 (Gabszewicz e Thisse, 1986)** L'equilibrio nei prezzi in strategie pure non esiste se

$$2(1 - b - a) \leq \min\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{r} + \sqrt{t}}\right)$$

In parole, quando le imprese sono troppo vicine tra loro, la presenza della componente quadratica nella funzione $c(d)$ non impedisce che l'incentivo alla predazione pregiudichi l'esistenza dell'equilibrio. Dati i segni di $\partial\pi_1/\partial a$ e $\partial\pi_2/\partial b$ nell'intervallo unitario, l'implicazione immediata della proposizione 5 è la seguente:

**Proposizione 6 (Gabszewicz e Thisse, 1986)** L'equilibrio perfetto nei sottogiochi in strategie pure nel modello orizzontale non esiste.

Anderson (1988) estende l'analisi condotta sul modello orizzontale da Gabszewicz e Thisse (1986) al caso in cui le collocazioni delle imprese non siano necessariamente simmetriche, e stabilisce che, per una qualsiasi coppia $(a, b)$ tale che $b \leq 1/2$ e $a < 1 - b$, se $a \geq (3 - b)/5$, allora non esiste un equilibrio nei prezzi in strategie pure in corrispondenza del quale il consumatore indifferente si collochi nell'intervallo $(a, 1 - b)$ (si veda il Lemma 5 in Anderson, 1988, p. 484).[4]

Dal modello verticale si ottiene la seguente, sotto l'ipotesi che entrambe siano a destra dell'intervallo unitario:

**Proposizione 7 (Gabszewicz e Thisse, 1986)** Se $r > t/2$, l'equilibrio nei prezzi in strategie pure esiste ed è unico, per qualsiasi coppia di collocazioni ammissibili. L'impresa 1 si colloca in $a = 1$, mentre l'impresa 2 si colloca in $1 - b = 2(2r - t)^2/(27r)$. Se $r \leq t/2$, si ha un continuum di equilibri in cui $a = 1$ e $b < 0$.

Questi risultati portano gli autori ad avanzare la considerazione che i modelli di differenziazione verticale potrebbero essere caratterizzati da una maggiore stabilità rispetto a quelli di differenziazione orizzontale. A parziale sostegno di questa tesi, si può notare che la letteratura analoga nel campo della differenziazione verticale, intesa come differenziazione qualitativa, ha prodotto risultati apparentemente più solidi e generali rispetto alla letteratura che stiamo passando in rassegna in questa sede (si rimanda ai contributi fondamentali di Gabszewicz e Thisse, 1979, 1980; Shaked e Sutton, 1982, 1983; e per un'efficace sintesi, a Beath e Katsoulacos, 1991).

[4] L'esistenza dell'equilibrio in strategie pure viene ristabilita supponendo che le imprese possano collocarsi anche all'esterno del segmento unitario. In tal caso, l'equilibrio simultaneo in strategie pure esiste per tutti i $t \in (0, 3r/2]$ (Lambertini, 2001).

# 4 Esiste un “principio di differenziazione”?

Il merito del presunto principio di massima differenziazione è stato quello di catalizzare l’attenzione su questa modellistica, ma purtroppo si è rivelato fragilissimo, e questo è stato dimostrato in molti modi diversi.

La strada forse più ovvia da percorrere è quella di ipotizzare che le imprese massimizzino i profitti congiunti. Questo significa che (i) fissano i prezzi allo stesso livello che sceglierebbe un monopolista con due prodotti, e (ii) fissano le collocazioni che, dati tali prezzi, massimizzano i profitti di cartello (ovvero, usano le collocazioni come strumento di discriminazione nei confronti dei consumatori). In questo caso, vale la seguente:

**Proposizione 8 (Bonanno, 1987; Häckner, 1995)** Se i prezzi sono fissati al livello di monopolio, le collocazioni ottimali sono 1/4 e 3/4.

Entrambi gli autori (ed altri insieme a loro) derivano questo risultato con costi di trasporto quadratici, ma l’estensione al caso lineare è immediata.[5] La proposizione 8 implica, naturalmente, che i due prodotti si collocano in corrispondenza dei punti socialmente ottimali, cioè quelli che minimizzano il totale dei costi di trasporto sopportati dai consumatori.[6]

Una strada alternativa consiste nell’assumere che le imprese giochino in modo non cooperativo avendo potenzialmente a disposizione tutto l’asse reale, posto che comunque i consumatori siano distribuiti solo sul segmento unitario. In altre parole, si può assumere che l’impresa i scelga $l \in (-\infty; 1/2]$; $l = a; b$; a patto che la combinazione di collocazione e prezzo sia tale da permettere copertura totale del mercato, ovvero, sia tale che il surplus netto del consumatore collocato in 1/2 sia non negativa. Sotto queste condizioni, si può analizzare l’influenza della distribuzione dei ruoli sulla natura dell’equilibrio al primo stadio. Questo è stato fatto assumendo costi di trasporto quadratici, ottenendo i seguenti risultati:

[5] Sotto l’ipotesi che siano possibili trasferimenti monetari tra imprese, Jehiel (1992) ottiene un risultato di minima differenziazione, $a = b = 1/2$. Naturalmente, tale ipotesi presta il fianco a ben note critiche e pertanto il risultato appare piuttosto debole.

[6] Il vantaggio sociale apparentemente legato alla collusione è un’evidente anomalia dei modelli spaziali. Non è nemmeno ovvio, del resto, che le imprese siano in grado di colludere. In tal caso, il regolatore può ricorrere a tasse o sussidi per ottenere lo stesso risultato (Lambertini, 1997a).

**Proposizione 9** (Anderson, 1988; Tabuchi e Thisse, 1995; Lambertini, 1997b) Quando il gioco è completamente simultaneo, le imprese fissano $a = b = -1/4$.

In questo caso non si può parlare di differenziazione massima o minima, anche se si può osservare che la differenziazione in equilibrio è superiore a quella desiderata dai consumatori.[7]

**Proposizione 10** (Lambertini, 1997b) Quando il primo stadio è sequenziale e il secondo è simultaneo, il leader nelle collocazioni si pone in 1/2 e il follower si colloca a distanza unitaria da lui. La differenziazione, in equilibrio, è verticale (in senso debole).

**Proposizione 11** (Lambertini, 1997b) Quando il primo stadio è simultaneo e il secondo è sequenziale, il leader nei prezzi si colloca in 0 (risp., 1) e il follower si colloca in 2 (risp., -1). La differenziazione, in equilibrio, è verticale (in senso debole).

Si consideri il caso in cui il primo stadio è giocato sequenzialmente mentre il secondo prevede mosse simultanee. Se un'impresa ha il vantaggio della prima mossa nello stadio delle collocazioni, la scelta ovvia è quella di collocasri nel centro del segmento. Dato questo, è nell'interesse dell'altra collocarsi all'esterno del segmento piuttosto che in un estremo per attenuare la competizione nello stadio dei prezzi. Diverso è il caso in cui viene giocato sequenzialmente lo stadio dei prezzi, mentre quello delle collocazioni è simultaneo. Il leader nei prezzi, anticipando il proprio ruolo nella fase di mercato, ha interesse a collocarsi in una posizione decentrata; mutatis mutandis, sulla base di un ragionamento analogo, per il follower è profittevole allontanarsi ulteriormente rispetto al caso precedente. L'incentivo a differenziarsi è ovviamente più alto per l'impresa che si aspetta di praticare il prezzo più basso. Mentre nel primo caso l'effetto di domanda prevale su quello strategico per il

[7] Questo, peraltro, è un risultato molto comune nella letteratura sulla concorrenza imprefetta. Per una esposizione esauriente, si rimanda ai testi di Tirole (1988) e di Beath e Katsoulacos (1991).

leader nelle collocazioni, e viceversa per il follower, nel secondo caso è l'e¤etto strategico a prevalere su quello di domanda per entrambe le imprese.

**Proposizione 12 (Lambertini, 1997b)** Quando la leadership è alternata, il leader nei prezzi si colloca in a=-1/3 (risp., b=-1/3), mentre il leader nelle collocazioni va in b=0 (risp., a=0). In equilibrio, la di¤erenziazione è strettamente orizzontale.

**Proposizione 13 (Lambertini, 1997b)** Quando la stessa impresa è leader in entrambi gli stadi, il leader si colloca in 1/2, mentre il follower si colloca in 13/6 o -7/6. In equilibrio, la di¤erenziazione è strettamente verticale.

Globalmente, le proposizioni 9-13 conducono alla seguente conclusione. Se le imprese hanno un peso comparabile all'interno del gioco, la di¤erenziazione, in equilibrio, è orizzontale. Altrimenti, se una delle due ha un vantaggio inequivocabile sull'altra, la di¤erenziazione diventa verticale (nello stesso senso de…nito da Gabszewicz e Thisse, 1986), almeno in senso debole.

All'interno di un gioco esteso con ritardo osservabile (Hamilton e Slutsky, 1990) si può mostrare che le imprese scelgono di giocare simultaneamente nelle collocazioni e sequenzialmente nei prezzi, e questo consente di produrre un teorema di unicità (Lambertini, 1997b):

**Proposizione 14 (Lambertini, 1997b)** Se le imprese possono determinare endogenamente la sequenza delle rispettive mosse in entrambi gli stadi, l'equilibrio perfetto in strategie pure è unico (a meno di una permutazione), e prevede che le imprese muovano simultaneamente nel primo stadio e sequenzialmente nel secondo.

**Dimostrazione** Per ragioni di spazio, tralascio la derivazione dei pro…tti di equilibrio relativi a ciascun caso particolare, rimandando per questo il lettore a Lambertini (1997b). Mi concentro invece sulle matrici di forma ridotta che consentono di descrivere la scelta endogena del timing. Si consideri, per prima cosa, il sottogioco in cui le imprese determinano il timing nello stadio dei prezzi, supponendo che quello delle collocazioni venga giocato in modo simultaneo. Questo caso è descritto dalla matrice 1.

| | | 2 | |
|---|---|---|---|
| | | P | T |
| 1 | P | 3t=4; 3t=4 | 2t; t |
| | T | t; 2t | 3t=4; 3t=4 |

Matrice 1

Le strategie P e T rappresentano, rispettivamente, la scelta di muovere presto oppure tardi. Se entrambe le imprese fanno la stessa scelta, ne deriva che muovono simultaneamente e i pro…tti rilevanti sono quelli dell'equilibrio di Nash; altrimenti, si ottiene un gioco di Stackelberg nei prezzi. Un rapido esame della matrice 1 permette di stabilire che questo sottogioco è un gioco dei sessi, e come tale possiede due equilibri, (P; T) e (T; P): Passiamo ora al sottogioco in cui le imprese decidono la sequenza delle mosse relativa allo stadio di mercato, supponendo di avere giocato sequenzialmente in quello delle collocazioni, con l'impresa 1 nel ruolo di leader. Questo caso è descritto dalla matrice 2, in cui la strategia tra parentesi indica il comportamento delle imprese al primo stadio.

| | | 2 | |
|---|---|---|---|
| | | (T)P | (T)T |
| 1 | (P)P | 8t=9; 2t=9 | 245t=108; 125t=216 |
| | (P)T | 32t=27; 16t=27 | 8t=9; 2t=9 |

Matrice 2

Anche questo sottogioco ha due equilibri di Nash, collocati però sulla diagonale secondaria: ((P)P; (T)T) ed ((P)T; (T)P): Quindi, l'analisi globale conduce a quattro possibili risultati che possono essere selezionati dalle imprese in base alla forma ridotta rappresentata dalla matrice 3.

|  |  | 2 |  |
|---|---|---|---|
|  |  | $P(P)$ | $T(P)$ |
| 1 | $P(T)$ | $t; 2t$ | $32t/27; 16t/27$ |
|  | $T(T)$ | $125t/216; 245t/108$ | $t; 2t$ |

Matrice 3

L'analisi della matrice 3 porta a concludere che il gioco ivi rappresentato possiede un unico equilibrio in strategie pure, $(P(T); P(P))$ (e viceversa quando l'impres 1 è il giocatore in colonna e l'impresa 2 è il giocatore in riga), in cui le imprese muovono simultaneamente nel primo stadio e simultaneamente nel secondo. ■

La terza strada percorribile per saggiare la solidità del principio di massima differenziazione consiste nell'aggiungere una seconda dimensione "verticale", che consiste in un segmento ortogonale a quello normalmente considerato (Tabuchi, 1994, per il caso bidimensionale; e Irmen e Thisse, 1998, per il caso multidimensionale). Le caratteristiche principali del modello multidimensionale di Irmen e Thisse (1998) si possono sintetizzare come segue. La differenziaizone del prodotto può avvenire lungo $n$ dimensioni, nello spazio $R^n$: La collocazione della prima impresa in tale spazio è definita dal vettore $\varphi = (\varphi_1; ... \varphi_n)$; quella della seconda impresa dal vettore $\psi = (\psi_1; ...\psi_n)$; con $\psi \geq \varphi$: Una popolazione unitaria di consumatori è distribuita uniformemente sull'ipercubo $C = [0; 1]^n$; e la posizione di ciascun consumatore è definita dal vettore $z = (z_1; ...z_n)$: La funzione di utilità indiretta di un consumatore generico che si serva presso l'impresa 1 è

$$U_1(z) = s - p_1 - \sum_{k=1} t_k (z_k - \varphi_k)^2; \tag{8}$$

dove $t_k$ indica il costo di trasporto unitario lungo la dimensione $k$-esima. La condizione di indifferenza è quindi la seguente:

$$p_1 + \sum_{k=1} t_k (z_k - \varphi_k)^2 = p_2 - \sum_{k=1} t_k (z_k - \psi_k)^2; \tag{9}$$

da cui si ricava la collocazione del consumatore indifferente lungo la dimensione n-esima:

$$\hat{h}_n(z_1; z_2; \ldots z_{n-1}) = \frac{p_2 - p_1 + \sum_{k=1}^{n} t_k(\psi_k^2 - \varphi_k^2)}{2t_n(\psi_n - \varphi_n)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t_k(\psi_k - \varphi_k)}{t_n(\psi_n - \varphi_n)} z_k. \qquad (10)$$

Senza perdita di generalità, gli autori assumono $t_n(\psi_n - \varphi_n) \geq t_{n-1}(\psi_{n-1} - \varphi_{n-1}) \geq \ldots \geq t_k(\psi_k - \varphi_k) \geq \ldots \geq t_1(\psi_1 - \varphi_1)$. Possono quindi presentarsi due casi:

- Se
$$\sum_{k=1}^{n-1} t_k(\psi_k - \varphi_k) \geq t_n(\psi_n - \varphi_n); \qquad (11)$$
allora la caratteristica n-esima è dominante in senso debole.

- Se
$$\sum_{k=1}^{n-1} t_k(\psi_k - \varphi_k) < t_n(\psi_n - \varphi_n); \qquad (12)$$
allora la caratteristica n-esima è dominante in senso forte.

Questa formalizzazione conduce alla seguente:

**Proposizione 15 (Irmen e Thisse, 1998)** I prezzi di equilibrio diminuiscono (aumentano) al diminuire della differenziazione lungo la caratteristica dominante (lungo le caratteristiche dominate). Quindi, in equilibrio, la differenziazione è minima lungo le caratteristiche dominate e massima lungo quella dominante.

Si osservi che Irmen e Thisse sostengono che, sulla base della proposizione 14, Hotelling potrebbe avere "quasi ragione", ma a questo si può obiettare, sulle stesse basi, che in realtà aveva "sicuramente torto". La ragione di questa affermazione è la seguente: da un lato, il risultato di minima differenziazione lungo $n - 1$ dimensioni sembra essere più importante della massima differenziazione che si verifica sull'n-esima, ma, dall'altro, l'implicazione diretta di questo risultato è che, se è disponibile una sola dimensione, allora le imprese dovranno sfruttarla appieno. In aggiunta a questo, il modello di Irmen e

Thisse contempla il caso di costi di trasporto quadratici, mentre per recuperare la conclusione di Hotelling occorrerebbe semmai considerare un modello multidimensionale con costi di trasporto lineari. In altre parole, quello che Irmen e Thisse potrebbero aver dimostrato è che d'Aspremont et al. (1979), i quali hanno individuato un principio di massima differenziazione lungo una sola delle $n$ dimensioni descritte da Irmen e Thisse, hanno posto un'enfasi eccessiva sul proprio risultato.

Il modello di Tabuchi (1994) è una versione molto semplificata di quello proposto da Irmen e Thisse (1998). In particolare, Tabuchi assume che le dimensioni siano solo due, cosicchè l'ipercubo si riduce ad un quadrato unitario. Le sue conclusioni, ovviamente, sono un caso particolare di quelle raggiunte da Irmen e Thisse:

**Proposizione 16 (Tabuchi, 1994; Irmen e Thisse, 1998)** Con costi di trasporto quadratici, se tutte le dimensioni disponibili sono equivalenti sotto il profilo della profittabilità, le imprese sfruttano al massimo la differenziazione lungo una qualsiasi e trascurano tutte le altre, lungo le quali la differenziazione di equilibrio è minima.

Il contributo principale di Tabuchi consiste nel dimostrare che il risultato di minima differenziazione lungo una dimensione e di massima lungo l'altra può emergere anche in assenza di dominanza dell'una sull'altra.

Alternativamente, si può ricorrere ad una vera e propria estensione che descriva le preferenze dei consumatori rispetto alla qualità del prodotto (Neven e Thisse, 1990), o diverse tecnologie di trasporto tra cui le imprese sceglieranno quella che risulta più profittevole, e i cui costi restano a carico dei consumatori (Dos Santos Ferreira e Thisse, 1996). Nel primo caso, la funzione di utilità indiretta o surplus del consumatore generico che si serva dall'impresa $i$ è definita come

$$U = s - p_t + \mu q_i - t(d), \tag{13}$$

dove $\mu$ è la propensione marginale alla spesa per la qualità, $q_i$ è la qualità offerta dall'impresa $i$ e $t(d)$ è la funzione che descrive il costo di trasporto. Neven e Thisse (1990) assumono $t(d) = td^2$, cioè la funzione che caratterizza il modello di d'Aspremont et al. (1979). Nel secondo caso, si assume che la funzione di utilità indiretta sia $U = s - p_t - t(d)$, e che le imprese possano scegliere una particolare tecnologia di trasporto caratterizzata da un costo unitario $t \in [\underline{t}, \overline{t}]$, con $\underline{t} > 0$. In tal caso, a parità di distanza e di prezzo

$p_i$, qualsiasi consumatore giudicherà il prodotto caratterizzato dal costo di trasporto inferiore come un bene di qualità più alta. Si noti che le due formulazioni sono sostanzialmente equivalenti; di conseguenza, non stupisce che abbiano condotto a risultati coincidenti.

**Proposizione 17 (Neven e Thisse, 1990)** Se le preferenze sono più intense sulla dimensione verticale che su quella orizzontale, si ha massima differenziazione lungo la dimensione qualitativa e minima differenziazione lungo quella spaziale (dominanza verticale), e viceversa (dominanza orizzontale).

Per interpretare la proposizione 16, supponiamo di esaminare il comportamento dell'impresa che vende la qualità più bassa, ad es. l'impresa 1. Se essa migliora la propria posizione lungo la caratteristica dominata (cioè aumenta la qualità o si accentra lungo il segmento, secondo i casi), il suo prezzo di equilibrio aumenta a dispetto del fatto che lungo tale dimensione la differenziazione diminuisce. Questo è reso possibile dallo sfruttamento della differenziazione lungo la caratteristica dominante. Il contrario vale naturalmente se le imprese si avvicinano lungo la dimensione dominante. Considerazioni simili valgono nel caso in cui la differenziazione verticale sia legata alla scelta del tasso di trasporto (Dos Santos Ferreira e Thisse, 1996). Quindi, possiamo scrivere la seguente:

**Proposizione 18 (Folk Theorem della differenziazione orizzontale)** Le imprese utilizzano una sola tra le $n$ dimensioni a loro disposizione, perchè domina almeno in senso debole l'uso di $k$ dimensioni, con $k \in [2; n]$:

I risultati passati in rassegna in questa sede fanno riferimento ad una modellistica in cui vengono mantenute inalterate due ipotesi fondamentali, vale a dire (i) la distribuzione dei consumatori è uniforme; e (ii) le imprese, al fine di massimizzare i profitti nello stadio di mercato, competono à la Bertrand. La rimozione di tali assunti conduce a risultati interessanti e, almeno in parte, non intuitivi. Tabuchi e Thisse (1995) considerano il caso di una distribuzione triangolare dei consumatori, con densità massima in corrispondenza di 1/2, mantenendo l'ipotesi di concorrenza di prezzo nel secondo stadio, ed ottengono un equilibrio asimmetrico in strategie pure nello stadio delle collocazioni, anche se le imprese muovono simultaneamente in entrambi gli stadi. Tale equilibrio è unico (a meno, evidentemente, di una permutazione delle imprese). L'asimmetria è dovuta ad una discontinuità nelle funzioni di reazione, ma la spiegazione intuitiva del fenomeno non è immediata. Tuttavia, l'ovvia rilevanza delle distribuzioni non uniformi apre un serissimo interrogativo sulla solidità dei risultati ottenuti con distribuzioni uniformi. In…ne, Anderson e Neven (1991) considerano il caso in cui le imprese competono à la Cournot nello stadio di mercato, mantenendo l'ipotesi di distribuzione uniforme, e dimostrano che l'ottimizzazione nelle quantità produce un risultato di minima di¤erenziazione al primo stadio. In quest'ultimo caso l'intuizione è a portata di mano, in quanto, essendo la competizione nelle quantità meno aspra di quella nei prezzi, scompare per le imprese l'incentivo ad usare la di¤erenziazione per tutelare i propri pro…tti.

# 5 Considerazioni conclusive

Le condizioni di esistenza dell'equilibrio nei prezzi (e, per estensione, quelle di esistenza dell'equilibrio perfetto nei sottogiochi in due stadi) in strategie pure ha attirato un parte notevole della ricerca condotta sui modelli di di¤erenziazione endogena negli ultimi venti anni. A dispetto di questo, la discussione condotta …nora porta sfortunatamente a conclusioni poco incoraggianti. Il principio di di¤erenziazione che possiamo trarne si riduce alla banale considerazione del fatto che, in equilibrio, le imprese sceglieranno un qualche ammontare di di¤erenziazione, e che quest'ultima dipenderà dalla natura del gioco, in modelli unidimensionali. Nei casi multidimensionali, le predizioni dei modelli teorici esistenti stabiliscono che una sola dimensione verrà sfruttata completamente in equilibrio, mentre le altre verranno trascurate altrettanto completamente. In…ne, tutti i modelli in cui le imprese hanno la possibilità di realizzare in equilibrio una di¤erenziazione di natura verticale sembrano essere intrinsecamente più inclini ad assicurare l'esistenza dell'equilibrio perfetto in strategie pure.

Il problema dell'esistenza dell'equilibrio e della sua caratterizzazione nei modelli di di¤erenziazione spaziale è verosimilmente destinato a focalizzare l'interesse dei ricercatori ancora a lungo. Una delle prospettive più promettenti riguarda la descrizione delle scelte delle imprese come il risultato di sforzi tecnologici. Finora, si sono descritti gli incentivi delle imprese a differenziarsi sulla base dei pro…tti operativi, in quanto si suppone che la scelta di una qualsiasi collocazione non sia costosa se non nella misura in cui influenza la performance dell'impresa sul mercato. Se, al contrario, la scelta della collocazione descrive effettivamente la determinazione delle caratteristiche del prodotto, allora occore descriverne i costi sotto forma di investimenti in ricerca e sviluppo (Harter, 1993; Lambertini et al., 2001). Questo, verosimilmente, potrebbe condurre a riformulare ampiamente la maggior parte delle conclusioni raggiunte da questo filone di ricerca.

## Riferimenti bibliografici

[1] Anderson, S. (1987), "Spatial Competition and Price Leadership", International Journal of Industrial Organization, 5, 369-98.

[2] Anderson, S. (1988), "Equilibrium Existence in a Linear Model of Spatial Competition", Economica, 55, 479-91.

[3] Anderson, S., A. De Palma e J.-F. Thisse (1992), Discrete Choice Theory of Product Differentiation, Cambridge, MA, MIT Press.

[4] Anderson, S. e D. Neven (1991), "Cournot Competition Yields Spatial Agglomeration", International Economic Review, 32, 793-808.

[5] Beath, J. e Y. Katsoulacos (1991), The Economic Theory of Product Differentiation, Cambridge, Cambridge University Press.

[6] Bonanno, G. (1987), "Location Choice, Product Proliferation and Entry Deterrence", Review of Economic Studies, 54, 37-46.

[7] Chamberlin, E.H. (1933), The Theory of Monopolistic Competition, Cambridge, MA, Harvard University Press.

[8] Dasgupta, P. e E. Maskin (1986), "The Existence of Equilibrium in in Discontinuous Economic Games: Theory and Applications", Review of Economic Studies, 53, 1-41.

[9] d'Aspremont, C., J.J. Gabszewicz e J.-F. Thisse (1979), "On Hotelling's 'Stability in Competition"', Econometrica, 47, 1045-50.

[10] Dos Santos Ferreira, R. e J.-F. Thisse (1996), "Horizontal and Vertical Differentiation: The Launhardt Model", International Journal of Industrial Organization, 14, 485-506.

[11] Economides, N. (1986a), "Nash Equilibrium in Duopoly with Products Defined by Two Characteristics", RAND Journal of Economics, 17, 431-39.

[12] Economides, N. (1986b), "Minimal and Maximal Differentiation in Hotelling's Duopoly", Economics Letters, 21, 67-71.

[13] Gabszewicz, J.J. e J.-F. Thisse (1979), "Price Competition, Quality and Income Disparities", Journal of Economic Theory, 20, 340-59.

[14] Gabszewicz, J.J. e J.-F. Thisse (1980), "Entry (and Exit) in a Differentiated Industry", Journal of Economic Theory, 22, 327-38.

[15] Gabszewicz, J.J. e J.-F. Thisse (1986), "On the Nature of Competition with Differentiated Products", Economic Journal, 96, 160-72.

[16] Gabszewicz, J.J. e J.-F. Thisse (1992), "Location", in Aumann, R. e S. Hart (a cura di), Handbook of Game Theory, vol. 1, Amsterdam, North-Holland.

[17] Häckner, J. (1995), "Endogenous Product Design in an Infinitely Repeated Game", International Journal of Industrial Organization, 13, 277-99.

[18] Hamilton, J. e S. Slutsky (1990), "Endogenous Timing in Duopoly Games: Stackelberg or Cournot Equilibria", Games and Economic Behavior, 2, 29-47.

[19] Harter, J.F.R. (1993), "Differentiated Products with R&D", Journal of Industrial Economics, 41, 19-28.

[20] Hinloopen, J. e C. van Marrewijk (1999), "On the Limits and Possibilities of the Principle of Minimum Differentiation", International Journal of Industrial Organization, 17, 735-50.

[21] Hotelling, H. (1929), "Stability in Competition", Economic Journal, 39, 41-57.

[22] Irmen, A. e J.-F. Thisse (1998), "Competition in Multi-Characteristics Space: Was Hotelling Almost Right?", Journal of Economic Theory, 78, 76-102.

[23] Jehiel, P. (1992), "Product Di¤erentiation and Price Collusion", International Journal of Industrial Organization, 10, 633-42.

[24] Lambertini, L. (1997a), "Optimal Fiscal Regime in a Spatial Duopoly", Journal of Urban Economics, 41, 407-20.

[25] Lambertini, L. (1997b), "Unicity of the Equilibrium in the Uncostrained Hotelling Model", Regional Science and Urban Economics, 27, 785-98.

[26] Lambertini, L. (2001), "Vertical Di¤erentiation in a Generalized Model of Spatial Competition", Annals of Regional Science, in pubblicazione.

[27] Lambertini, L., S. Poddar e D. Sasaki (2001), "RJVs and Price Collusion under Endogenous Product Di¤erentiation", International Journal of Industrial Organization, in pubblicazione.

[28] Neven, D. e J.-F. Thisse (1990), "Quality and Variety Competition", in Gabszewicz, J.J., J.-F. Richard e L. Wolsey (a cura di), Economic Decision Making: Games, Econometrics, and Optimization. Contributions in Honour of Jacques Drèze, Amsterdam, North-Holland, 175-99.

[29] Osborne, M.J., e C. Pitchik (1987), "Equilibrium in Hotelling's Model of Spatial Competition", Econometrica, 55, 911-22.

[30] Salop, S. (1979), "Monopolistic Competition with Outside Goods", Bell Journal of Economics, 10, 141-56.

[31] Shaked, A. e J. Sutton (1982), "Relaxing Price Competition through Product Di¤erentiation", Review of Economic Studies, 69, 3-13.

[32] Shaked, A. e J. Sutton (1983), "Natural Oligopolies", Econometrica, 51, 1469-83.

[33] Tabuchi, T. (1994), "Two-Stage Two-Dimensional Spatial Competition between Two Firms", Regional Science and Urban Economics, 24, 207-27.

[34] Tabuchi, T. e J.-F. Thisse (1995), "Asymmetric Equilibria in Spatial Competition", International Journal of Industrial Organization, 13, 213-27.

[35] Tirole, J. (1988), The Theory of Industrial Organization, Cambridge, MA, MIT Press. Trad. it. La teoria dell'organizzazione industriale, Milano, Hoepli, 1991.