Bolle, Crisi Finanziarie, e Cicli di Credito

Gabriella Chiesa

Bolle e successive Crisi Finanziarie sono fenomeni osservati "da sempre" nelle economie finanziarie. Esempi storici sono:

"Tulipmania" olandese all'inizio del 17esimo secolo (1636-1637);

(i prezzi dei tulipani andarono alle stelle per poi cadere repentinamente in modo drammatico: considerevoli fallimenti, perchè la speculazione era stata finanziata prendendo a prestito: il collasso dei prezzi indusse i fallimenti)

La "South Sea Bubble" nell'Inghilterra dell'inizio del 18esimo secolo (1719-1720);

La "Missisipi Bubble" in Francia dell'inizio del 18esimo secolo (1719-1720) – connessa alla South Sea Bubble

(originate da attività bancaria in assenza di obbligo di riserve: prezzi delle azioni alle stelle, seguito da drammatica caduta, e fallimenti)

La Grande Depressione Americana del 1929

La bolla nei prezzi azionari e degli immobili in Giappone alla fine degli anni 80, e il successivo collasso negli anni 90;

L'esperienza dei paesi Scandinavi: Norvegia, Finlandia e Svezia a cavallo degli anni 80, 90;

(deregolamentazione del sistema bancario, espansione del credito, aumento dei prezzi azionari, degli immobili, ..; caduta, insolvenze)

Nelle economie emergenti: crisi finanziarie sono ricorrenti soprattutto a partire dagli anni 80; esempi sono: Argentina, Cile, Indonesia, Messico; e più recentemente le economie del Sud-Est Asiatico: Malesia, Indonesia, Tailandia, Sud-Corea.

Recentemente: Internet Bubble, ...e stock-market crash

Bolle nei prezzi delle attività (finanziarie, e poi reali).

Tipicamente hanno tre fasi distinte:

i) liberalizzazione finanziaria e/o politica della Banca Centrale favorevole all'espansione del credito

$\longrightarrow$ Espansione del Credito;

$\uparrow$ aumento dei prezzi delle attività finanziarie (azioni) e reali (immobili)

La crescita dei prezzi persiste e accelera per un periodo di tempo che perdura anche diversi anni: la bolla si gonfia;

ii) la bolla esplode, i prezzi delle attività implodono (cadono vertiginosamente)

iii) fallimenti, crisi bancarie

conseguenti al fatto che:

a) l'acquisto di attività finanziarie, e reali è stato finanziato prendendo a prestito;

b) le attività finanziarie e reali servono come "collaterali" dei debiti contratti **

iv) spillovers su altri settori dell'economia, credit-crunch (restrizione nella disponibilità di credito) conseguente all'indebolimento delle banche (sottocapitalizzate)

Riferimenti Bibliografici

L'intero numero 3 del volume 15 (1999) Oxford Review of Economic Policy

interamente dedicato a "Financial Instability"

Bordo, M., e O.Jeanne (2002), "Boom-Busts in Asset Prices, Economic Instability, and Monetary Policy" NBER Working Paper 8966

soprattutto con riferimento all'inversione dei prezzi in Usa e Giappone: US stock-market crash del 1929, e lo scoppio della bolla "Giapponese" nel 1989.

Allen, F. e D. Gale (2000), "Bubbles and Crises", the Economic Journal 110, pp. 236-255.

L'introduzione da conto delle principali esperienze storiche; poi viene offerta una chiave interpretativa fondata: a) sui problemi di agenzia connessi alla relazione prenditore/prestatore; b) sul fatto che il motore (la causa prima) sia l'espansione creditizia innescata a monte dalla politica della Banca Centrale (politica monetaria e/o deregolamentazione del sistema bancario)

Allen, F. e D. Gale (2001), "Financial Structure and Financial Crisis", International Review of Finance 2, pp.1-19.

Chiave Interpretativa

basata su

a) problemi di agenzia connessi alla relazione prenditore/prestatore;

b) sul fatto che il motore (la causa prima) sia l'espansione creditizia innescata a monte dalla politica della Banca Centrale (politica monetaria e/o deregolamentazione del sistema bancario)

(in linea con l'esperienza storica)

Esempio

Investitori hanno accesso:

	Offerta	Invest $data$ 1	Payoff data 2	
Non-$risky$	variabile	1	1.5	
Risky	1	P	$R = 6$ $R = 1$	$pr.0.25$ $pr.0.75$

$$E(R) = 2.25$$

Caso base: ciascun investitore ha un'unità (Non prende a prestito).

Il prezzo dell'attività rischiosa sarà P_F tale che:

$$\frac{E(R)}{P_F} = \frac{1.5}{1}$$

$$\frac{2.25}{P_F} = \frac{1.5}{1}$$

** i rendimenti delle due attività sono equalizzate. Vero per P_F:

$$P_F = \frac{2.25}{1.5} = 1.5$$

P_F è il valore del "fondamentale"

Finanziamento

Gli investitori prendono a prestito. Il massimo credito concesso a ciascuno è un'unità.

Sia D la promessa di pagamento dovuta alla data 2 per un prestito di un'unità alla data 1. Si consideri

$$D = 1.33$$

?? Sarà ancora vero che il prezzo dell'attività rischiosa è P:

$$P = P_F = 1.5 \quad ??$$

ovvero uguale al "fondamentale" ?

Investitore sceglie tra:

1. prendere a prestito un'unità ed investire nell'attività non-rischiosa; dato $D = 1.33$, il payoff è:

$$1.5 - 1.33 = 0.17$$

2. prendere a prestito un'unità ed investire nell'attività rischiosa; dato $D = 1.33$, $P = 1.5$, il payoff è:

$$0.25\left(\frac{1}{1.5}6 - 1.33\right) + (0.75)(0) = 0.67$$

Conclusione:

Con debito, per $P = P_F$, l'attività rischiosa è PREFERITA

** Debito: incentiva a prendere rischio

Qual'è il prezzo d'equilibrio dell'attività rischiosa?

P tale che:

$$0.25(\frac{1}{P}6 - 1.33) + (0.75)(0) = 1.5 - 1.33$$

ovvero

$$P = 3$$

C'è una "bolla" : il prezzo dell'attività rischiosa, $P = 3$, eccede il valore del "fondamentale" ($P_F = 1.5$)

Tanto più grande il rischio, tanto più grande la bolla

	Offerta	Invest $data$ 1	Payoff data 2	
Non- $risky$	variabile	1	1.5	
Risky	1	P	$R = 9$ $R = 0$	$pr.0.25$ $pr.0.75$

$$E(R) = 2.25$$

come prima,

$$P_F = \frac{2.25}{1.5} = 1.5$$

ma "più rischiosa" !

Sia $D = 1.33$, il prezzo dell'attività rischiosa è P :

$$0.25\left(\frac{1}{P}9 - 1.33\right) + (0.75)(0) = 1.5 - 1.33$$

cioè

$$P = 4.5$$

Conclusione:

Bolle sono riconducibili:

alla possibiltà di prendere posizioni rischiose con finanziamento esterno (debito)

$\to\to$ incentivo a prendere rischio

questo incentivo induce l'aumento del prezzo delle attività che sono in offerta fissa: azioni, immobili

La bolla è tanto più grande quanto più è rischiosa l'attività.

Nell'esempio, il tasso d'interesse sul prestito era "dato" (non-spiegato).

Il modello di Allen-Gale (2001) – Economic Journal– lo spiega:

introducendo l'offerta di credito, ed endogenizzando il risultato dell'attività non-rischiosa (funzione crescente e concava dell'investimento in tale attività). Il tasso d'interesse è individuato dalla condizione d'equilibrio sul mercato del credito.

Tanto più è abbondante l'offerta di credito, B, tanto più il prezzo dell'attività rischiosa è elevato ed al di sopra del "fondamentale":

$$P = f(B)\ ,\ \frac{\partial P}{\partial B} > 0$$

Estendendo il modello a più periodi (2 periodi: date (0,1), (1,2)) si nota che:

Incertezza riguardo all'espansione del credito genera larghe deviazioni dei prezzi dai fondamentali (grandi bolle):

il prezzo futuro dell'attività rischiosa dipende dalla disponibilità di credito futura, tanto meno è certa tanto più è "volatile" il prezzo futuro: tanto più rischioso è l'investimento.

Abbiamo le stesse conclusioni desunte dall'esempio: con debito gli investitori "amano il rischio": il prezzo corrente dell'attività rischiosa (il prezzo che uguaglia l'offerta fissa alla domanda) è tanto più elevato quanto più l'attività è rischiosa, ovvero quanto più è incerta la disponibilità di credito futura.

Perchè la bolla la bolla esploda, perchè si abbia crisi, è sufficiente che la disponibilità di credito pur continuando a crescere si posizioni al di sotto del valore massimo che il mercato ritenga realizzabile.

Ipotesi sottostanti:

Segmentazione dei mercati: gli investimenti in attività rischiosa e non-rischiose sono accessibili agli "investitori" e non alle banche (e/o gli investitori finali – i detentori ultime delle risorse).

Cicli di Credito

La gran parte dei prestiti sono concessi sulla base di garanzie reali, collaterali.

Interazione positiva tra il prezzo delle attività (ad esempio real estate) e volume del credito (prestiti collateralizzati)

elemento già rilevato in

Veblen, T. (1904), *The Theory of Business Enterprise*, Scribner, New York

Cicli di Credito:

alcune imprese sono razionate nel credito che possono ottenere ed usano le proprie attività reali come collaterale:

Il problema sottostante: enforceability dei contratti. Un prenditore può "fuggire con i soldi" ma non può portare con sè il capitale reale

-le attività reali (capitale reale) sono un mezzo di produzione e al tempo stesso servono come garanzia (collaterale)

- la disponibilità di credito (l'entità di mezzi produttivi) è limitata al valore delle garanzie:

uno shock nella produttività deprime il valore delle attività produttive (il net worth delle imprese), riduce il valore delle garanzie e con esso il credito che le imprese ottengono: riduzione degli investimenti (volume di attività) delle imprese credit constrained.

L'effetto è cumulativo: la riduzione degli investimenti da parte delle imprese deprime i redditi futuri delle imprese e dunque il loro net worth, gli investimenti da parte delle imprese sono ulteriormente ridotti

$\Rightarrow$ la domanda di attività reale (capitale reale) si deprime e continua a deprimersi fin tanto che il prezzo di tale attività si riduce sufficientemente da indurre domanda (investimenti reali) da parte delle imprese non credit constrained in misura sufficiente ad invertire il ciclo: il prezzo delle attività reali $\Uparrow$, le imprese che erano credit-constrained hanno maggior accesso al credito (il valore delle loro garanzie è aumentato), investono ...

Il punto cruciale è il fatto che il volume di credito cui un'impresa può accede è una funzione crescente del valore di mercato delle garanzie.

Una versione semplificata di Kiyotaki e Moore (Credit Cycles, Journal of Political Economy 1997, vol.105, pp.211-248) – Freixas, X., e J.C. Rochet (1998), The Microeconomics of Banking, MIT Press, Cap.6, pp.180-183.

L'economia:

gli agenti sono neutrali al rischio e il saggio marginale di sostituzione tra consumo presente e futuro è pari a β, con $0 < \beta < 1$. Vi sono due beni:

uno è deperibile (bene di consumo e/o capitale circolante), che denotiamo con c

l'altro è un bene capitale (real estate). La dotazione complessiva dell'economia di bene capitale è A_0.

Il bene capitale ha due possibili usi: fattore produttivo, uso abitativo. Denotermemo con q_t il prezzo di un'unità di bene capitale al tempo t (espresso in unità di beni di consumo, il numerario).

Entrambi i beni sono necessari per produrre, secondo la tecnologia:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \\ c & \text{bene capitale} \end{pmatrix}_t \longrightarrow X_{t+1} \qquad (1)$$

unita' di otput

ovvero investendo 1 unità di bene di consumo e λ unità di bene capitale al tempo t si ottengono X unità di bene di consumo al tempo $t+1$.

Gli agenti nell'economia appartengono a due classi: prestatori, imprenditori:

prestatori hanno una dotazione di bene di consumo (capitale circolante);

imprenditori hanno la tecnologia (possono produrre), e il bene capitale (sono proprietari del real estate),

prendono a prestito capitale circolante, ma il prestito deve essere garantito con collaterale: il bene capitale. Si denoti con q_{t+1} il prezzo unitario dei beni capitali (real estate) al tempo $t+1$, il valore complessivo delle garanzie al tempo $t+1$ è

$$q_{t+1}A_0$$

Il volume massimo di credito che gli imprenditori possono ottenere al tempo t è pari al valore scontato delle garanzie, ovvero è c_t:

$$c_t = \frac{q_{t+1}A_0}{1+r} \tag{2}$$

dove r è il tasso d'interesse ($r = \frac{1}{\beta} - 1$).

*** quanto sono tenuti a pagare al tempo $t+1$, $c_t(1+r)$, uguaglia il valore delle garanzie al tempo $t+1$, ovvero $q_{t+1}A_0$

NB$_1$: il volume di credito è crescente in q_{t+1}, il prezzo di mercato delle attività (garanzie)

Si supponga che le imprese ricorrano al credito secondo il massimo loro concesso, allora l'entità di fattore produttivo "bene di consumo" o "capitale circolante" di cui dispongono al tempo t sarà pari a c_t definito dalla (2), e data la tecnologia (1) le unità di bene capitale che useranno per la produzione al tempo t sarà pari ad A_t:

$$A_t = \lambda c_t$$

ovvero

$$A_t = \lambda \frac{q_{t+1}A_0}{1+r} \tag{3}$$

NB$_2$: la quantità di bene capitale ad uso produttivo è crescente nel prezzo dello stesso, q_{t+1}

(tanto più è alto q_{t+1}, tanto più è alto il valore di mercato delle garanzie, tanto più si può prendere a prestito).

Tanto più è elevato A_t, tanto più è bassa la quantità di bene capitale disponibile per l'uso alternativo (ad esempio, l'uso abitativo), tanto più elevato sarà allora il saggio di rendimento del capitale ad uso abitativo. Possiamo allora ipotizzare che il rendimento del capitale ad uso abitativo, h_t, sia descrivibile dalla seguente equazione:

$$h_t = m\,(A_t + h_0) \tag{4}$$

dove m, h_0 sono costanti, ed $m > 0$.

Si consideri un detentore di bene capitale (un imprenditore), se vende un'unità al tempo t realizza il prezzo di mercato del bene capitale al tempo t, ovvero q_t; se non la vende al tempo $t+1$, avrà:

$$q_{t+1} + \left[x\frac{q_{t+1}}{1+r} - q_{t+1}\right] + \left\{h_t\left[1 - \lambda\frac{q_{t+1}}{1+r}\right]\right\} \quad (5)$$

infatti: al tempo $t+1$ l'unità avrà il prezzo di mercato q_{t+1}, inoltre quell'unità ha permesso di prendere a prestito al tempo t capitale circolante in misura pari a $\frac{q_{t+1}}{1+r}$ (il valore scontato al tempo t di un'unità di bene capitale) e quindi ha permesso di produrre $x\frac{q_{t+1}}{1+r}$ unità di beni utilizzando la frazione $\lambda\frac{q_{t+1}}{1+r}$ di bene capitale come fattore produttivo. La rimanente frazione, $1-\lambda\frac{q_{t+1}}{1+r}$, è usata a fine abitativo. L'espressione in parentesi quadra è il "reddito netto d'impresa" generato da un'unità di bene capitale (il valore della produzione $x\frac{q_{t+1}}{1+r}$ *meno* quanto dovuto al prestatore, $\frac{q_{t+1}}{1+r}(1+r)$). L'espressione in parentesi graffa è il reddito generato dall'uso abitativo (il rendimento dell'uso abitativo, h_t, moltiplicato per la frazione dedicata ad uso abitativo, $1 - \lambda \frac{q_{t+1}}{1+r}$).

Il valore scontato al tempo t del payoff che si ha in $t+1$ da un'unità di bene capitale è

$$\frac{1}{(1+r)} \left\{ q_{t+1} + \left[x \frac{q_{t+1}}{1+r} - q_{t+1} \right] + \left\{ h_t \left[1 - \lambda \frac{q_{t+1}}{1+r} \right] \right\} \right\} \tag{6}$$

Se il prezzo di mercato al tempo t di un'unità di bene capitale, q_t, eccedesse il valore della (6), tutti i detentori di bene capitale vorrebbero vendere l'intera loro dotazione, se fosse inferiore tutti vorrebbero acquistare. La condizione d'equilibrio (o assenza di arbitraggio) richiede:

$$\frac{1}{(1+r)} \left\{ q_{t+1} + \left[x \frac{q_{t+1}}{1+r} - q_{t+1} \right] + \left\{ h_t \left[1 - \lambda \frac{q_{t+1}}{1+r} \right] \right\} \right\} \tag{7}$$

$$= q_t$$

Usando la (4) e la (3), la (7) può scriversi:

$$q_t = aq_{t+1}^2 + bq_{t+1} + c \tag{8}$$

dove:

$$a \equiv \frac{-m\lambda^2 A_0}{(1+r)^3}$$

$$b \equiv \frac{X - \lambda m \left(h_0 - A_o\right)}{(1+r)^2}$$

$$c \equiv \frac{mh_0}{1+r}$$

Il sistema dinamico definito dalla (7) può ammettere cicli, si veda la Figura 1.

L'elemento cruciale è quanto rilevato con NB_2, ovvero la domanda del bene capitale è *crescente* nel prezzo.

(grazie al ruolo di collaterale che riveste)

— Riferimento bibliografico (Cicli):

Baumol, W., and J.Benhabib (1989), "Chaos: Significance, Mechanism and Economic Applications", *Journal of Economic Perspectives* 3, pp. 77-105. —

Altri contesti rilevanti:

Il mercato delle abitazioni:

Stein, J.C. (1995), "Prices and Trading Volume in the Housing Market: A Model with Down-Payment Effects", *Quarterly Journal of Economics* 110, pp.379-406.

Analizza gli scambi nel mercato delle abitazioni e mostra che a causa del fatto che chi acquista lo fa indebitandosi, stipulando un mutuo collateralizzato dall'abitazione, l'aumento del prezzo delle abitazioni induce un aumento nella domanda delle stesse: la domanda è crescente nel prezzo! Questo è in linea con l'evidenza di correlazione positiva tra i prezzi delle case e il volume degli scambi.

Esercizio

Si consideri l'economia sopra definita, e si assuma che il credito ottenibile per unità di bene capitale sia pari alla frazione θ del suo valore (in linea con la tradizione italiana nella concessione di prestiti). L'aspetto interessante sono le implicazioni sul ciclo.

Traccia di risposta

Il valore complessivo delle garanzie al tempo $t+1$ è ancora

$$q_{t+1}A_0$$

ma Il volume di credito che gli imprenditori possono ottenere al tempo t è ora c_t:

$$c_t = \frac{\theta q_{t+1} A_0}{1+r} \tag{2a}$$

dove r è il tasso d'interesse ($r = \frac{1}{\beta} - 1$).

Si supponga che le imprese ricorrano al credito secondo il massimo loro concesso, allora l'entità di fattore produttivo "bene di consumo" o "capitale circolante" di cui dispongono al tempo t sarà pari a c_t definito dalla ($2a$), e data la tecnologia (1) le unità di bene capitale che useranno per la produzione al tempo t sarà pari ad A_t:

$$A_t = \lambda c_t$$

ovvero

$$A_t = \lambda \frac{\theta q_{t+1} A_0}{1+r} \tag{3a}$$

Il rendimento del capitale ad uso abitativo, h_t, sarà ancora descritto dalla (4):

$$h_t = m\left(A_t + h_0\right) \tag{4}$$

dove m, h_0 sono costanti, ed $m > 0$.

Si consideri un detentore di bene capitale (un imprenditore), se vende un'unità al tempo t realizza il prezzo di mercato del bene capitale al tempo t, ovvero q_t; se non la vende al tempo $t+1$, avrà:

$$q_{t+1} + \left[x\frac{\theta q_{t+1}}{1+r} - \theta q_{t+1}\right] + \left\{h_t\left[1 - \lambda\frac{\theta q_{t+1}}{1+r}\right]\right\} \tag{5a}$$

infatti: al tempo $t+1$ l'unità avrà il prezzo di mercato q_{t+1}, inoltre quell'unità ha permesso di prendere a prestito al tempo t capitale circolante in misura pari a $\frac{\theta q_{t+1}}{1+r}$ e quindi ha permesso di produrre $x\frac{\theta q_{t+1}}{1+r}$ unità di beni utilizzando la frazione $\lambda\frac{\theta q_{t+1}}{1+r}$ di bene capitale come fattore produttivo. La rimanente frazione, $1-\lambda\frac{\theta q_{t+1}}{1+r}$, è usata a fine abitativo. L'espressione in parentesi quadra è il "reddito netto d'impresa" generato da un'unità di bene capitale (il valore della produzione $x\frac{\theta q_{t+1}}{1+r}$ *meno* quanto dovuto al prestatore, $\frac{\theta q_{t+1}}{1+r}(1+r)$). L'espressione in parentesi graffa è il reddito generato dall'uso abitativo (il rendimento dell'uso abitativo, h_t, moltiplicato per la frazione dedicata ad uso abitativo, $1-\lambda\frac{\theta q_{t+1}}{1+r}$).

La condizione d'equilibrio (o assenza di arbitraggio) richiede:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1+r)}\left\{\begin{array}{c} q_{t+1}+\theta\left[x\frac{q_{t+1}}{1+r}-q_{t+1}\right]+ \\ +h_t\left[1-\lambda\frac{\theta q_{t+1}}{1+r}\right] \end{array}\right\} \\ = \; & q_t \end{aligned} \tag{7a}$$

Usando la (4) e la (3a), la (7a) può scriversi :

$$q_t = aq_{t+1}^2 + bq_{t+1} + c \tag{8}$$

dove:

$$a \equiv \frac{-m\lambda^2\theta^2 A_0}{(1+r)^3}$$

$$b \equiv \frac{1-\theta}{1+r} + \frac{\theta\left[X - \lambda m\left(h_0 - A_o\right)\right]}{(1+r)^2}$$

$$c \equiv \frac{mh_0}{1+r}$$

Kiyotaki-Moore

Two goods: durable asset and non-durable commodity.

Durable$=$ land. Fixed total supply $\overline{K}$; non-durable: fruit (it cannot be stored)

Continuum of infinitely-lived agents: Farmers, population size 1; gatherers, population size m.

Both produce and eat fruit. They are risk-neutral:

$$\text{Farmers:} \quad E_t \left(\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s x_{t+s} \right) \tag{1}$$

$$\text{Gatherers:} \quad E_t \left(\sum_{s=0}^{\infty} \beta'^s x'_{t+s} \right) \tag{1'}$$

x= consumption of fruit ;

$$0 < \beta < 1 \ , \ \ 0 < \beta' < 1$$

ASSUMPTION 1: linear preferences but different discount factors

$$\beta < \beta'$$

farmers are more impatient than gatherers.

At each date t there is a competitive spot market in which land is exchanged for fruit at a price q_t.

(fruit is taken as the numeraire).

The (only) other market is a one-period credit market in which one unit of fruit at date t is exchanged for a claim to R_t units of fruit at date $t+1$ (me lender gives you one unit to day, date t, you borrower will give me R_t units tomorrow, date $t + 1$).

We shall see that in equilibrium the farmers borrow from the gatherers, and that the (gross) rate of interest always equals the gatherers' rate of time preferences: $R_t = \frac{1}{\beta'} = R$, $\forall t$

$$R_t = R = \frac{1}{\beta'}$$

Both farmers and gatherers take one period to produce fruit from land, but have different technologies:

Farmers (population size 1)

$$y_{t+1} = F(k_t) = (a + c)\, k_t \tag{2}$$

$k_t =$ land used at t ; $y_{t+1}=$ output (of fruit) at date $t + 1$.

ak_t is tradable; ck_t can only be consumed by the farmer (he cannot consume less than ck_t). If he consumes only ck_t , then he saves ak_t, and his saving rate is

$$\frac{ak_t}{y_{t+1}} = \frac{ak_t}{(a+c)\,k_t} = \frac{a}{a+c}\ .$$

This is the farmer's maximum saving rate (he can save less, consume more, but he cannot save more given that c cannot be used other than for personal consumption) – what can it do with his "fruit saved" ? he cannot store fruit, he can use them to buy land.

ASSUMPTION 2 a farmer can save only a fraction of his output and his saving rate:

$$\frac{a}{a+c} < \beta$$

that is

$$c > \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) a$$

We shall se that this ensures that in equilibrium the farmer will not want to consume more than his non-tradable output c : all his tradable output ak_t is saved: used for investment (buy land). That is in equilibrium, the farmer's saving constraint binds (remember: he cannot save more than ak_t).

*** Goal: focus on cash-flow constraints

Outsiders cannot get their hands on the farmer's output, if the farmer borrows at date t and refuses to honor his obligation, all what the lender can do is to threaten the farmer to take possession of his land, provided that the loan is secured by the farmer's land (if not, then lenders get nothing – loose their money):

** Farmer gets outside financing through secured debt (the collateral is the land);

** if at date t the farmer has k_t, then the maximum he can borrow is b_t:

$$b_t < \frac{q_{t+1}k_t}{R} \tag{3}$$

debt issued at date t cannot exceed the (discounted) value of the collateral at date $t+1$.

— the maximum creditor can get at date $t+1$ is the value of the farmer's land at date $t+1$, at date t the creditor will not lend more than the discounted value of that.

— given debt b_t raised at date t, the farmer will pay creditor the amount Rb_t at date $t+1$ (if he will not refuse to pay, because the creditor can take possession of the land, in which case the farmer effectively pays $q_{t+1}k_t$).

The farmer can expand his scale of production by investing in more land. Consider a farmer that at the end of date $t-1$ has k_{t-1} land and a total debt outstanding (raised at date $t-1$) b_{t-1}, i.e. he owes Rb_{t-1} to his creditor(s). At date t his tradable output is ak_{t-1}, this together with a new loan b_t is available to cover the cost of buying new land (investment), to repay his debt Rb_{t-1}, and to meet any additional consumption x_t- ck_{t-1}. The farmer's flow of funds constraint at date t is:

$$q_t\left(k_t-k_{t-1}\right)+Rb_{t-1}+x_t-ck_{t-1}=ak_{t-1}+b_t \quad (4)$$

Gatherers (population size m)

Each has an identical production function that has decreasing return to scale:

$$y'_{t+1}=G(k'_{t+1}) \quad (5)$$

$G(..)$ is increasing and concave:

$$G'>0,\ G\text{"}<0$$

$$G'(0) > aR > G'\left(\frac{\overline{K}}{m}\right)$$

this ensures that both farmers and gatherers are producing in the neighborhood of the steady state equilibrium.

Gatherers'output is entirely tradable. They cannot repudiate debt, no moral-hazard, ... No constraint on fundings they can raise. A gatherer's flow of funds constraint (budget constraint) at date t is:

$$q_t\left(k'_t - k'_{t-1}\right) + Rb'_{t-1} + x'_t = G\left(k'_t\right) + b'_t \qquad (6)$$

where x'_t is consumption at date t, Rb'_{t-1} is debt repayment due at t, b'_t is new debt. In equilibrium, gatherers' debts will be negative: gatherers will be creditors to the farmers.

Market Equilibrium

is defined as a sequence of land prices, allocation of land, debt, consumption of farmers and gatherers

$$\left\{q_t, k_t, k_t', b_t, b_t', x_t, x_t'\right\}$$

such that:

i) each farmer chooses $\{k_t, b_t, x_t\}$:

$$\underset{\{k_t, b_t, x_t\}}{Max} E_t \left(\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s x_{t+s} \right)$$

$$s.t.$$

$$y_{t+1} = (a + c)\, k_t \text{ (not needed)}^*$$

$$R b_t \leq q_{t+1} k_t \quad \text{(BC)}$$

$$q_t \left(k_t - k_{t-1}\right) + R b_{t-1} + x_t - c k_{t-1} = a k_{t-1} + b_t \quad \text{(FC)}$$

$$x_t \geq ck_{t-1} \tag{CC}$$

ii) each gatherer chooses $\{k'_t, b'_t, x'_t\}$:

$$\underset{\{k'_t, b'_t, x'_t\}}{Max} E_t \left(\sum_{s=0}^{\infty} \beta'^s x'_{t+s} \right)$$

$$s.t.$$

$$y'_{t+1} = G(k'_t) \text{ (not needed)}^{\dagger}$$

$$q_t \left(k'_t - k'_{t-1} \right) + Rb'_{t-1} + x'_t = G(k'_{t-1}) + b'_t$$

iii) the markets for land, fruit, and credit clear.

Characterization of equilibrium

Suppose that the farmer's optimal choice is: to consume only his non-tradable output, that is

$$x_t = ck_{t-1} \quad \text{(CC is binding)} \;\; ;$$

to borrow up to the maximum

$$b_t = \frac{q_{t+1}k_t}{R} \qquad \text{(BC is binding)} \; ,$$

then from the flow of funds constraint (FC) we have that

$$q_t\left(k_t - k_{t-1}\right) + Rb_{t-1} = ak_{t-1} + b_t \; ,$$

or equivalently,

$$q_tk_t - b_t = \left[\left(a + q_t\right)k_{t-1} - Rb_{t-1}\right] \qquad \text{(7a)}$$

where

$$b_t = \frac{q_{t+1} k_t}{R} \qquad (7.b)$$

REMARK

The term

$$\left[\left(a + q_t\right) k_{t-1} - R b_{t-1}\right]$$

is the farmer's net worth at the beginning of date t : the value of his tradable output, ak_{t-1}, plus the value of his land $q_t k_t$, minus the repayment of his debt, Rb_{t-1}. E' il valore di mercato del suo patrimonio netto all'inizio della data t. Se liquidasse la sua impresa (se vendesse la terra di cui dispone e il tradable output) otterrebbe al netto di quanto deve e paga ai creditori, esattamente $\left[\left(a + q_t\right) k_{t-1} - R b_{t-1}\right]$.

$q_t k_t - b_t$ is the difference between the market value of the land he wants to own in the next period (date t) and the outside financing – debt– he can raise by offering as collateral k_t; $q_t k_t - b_t$ is the down-payment he has to make (inside funds he must invest) at date t in order to own k_t units of land.

*** The farmer uses all his net worth to finance the difference between the cost of k_t units of land and the amount he can borrow against that.

Substituting $(7.b)$ into $(7.a)$ and rearranging leads to:

$$k_t = \frac{1}{u_t}\left[(a + q_t)\, k_{t-1} - Rb_{t-1}\right] \qquad (7)$$

$$u_t \equiv q_t - \frac{q_{t+1}}{R}$$

REMARK

The diffrence $q_t - \frac{q_{t+1}}{R}$, i.e.

$$u_t \equiv q_t - \frac{q_{t+1}}{R}$$

can be interpreted as the down payment required to purchase a unit of land, given that the amount that can be borrowed against one unit of land is $\frac{q_{t+1}}{R}$ and one unit of land costs q_t.

Because the optimal k_t and b_t are linear in k_{t-1} and b_{t-1}, we can aggregate across farmers:

$$K_t = \frac{1}{u_t} \left[(a + q_t) K_{t-1} - RB_{t-1} \right] \tag{9}$$

$$B_t = \frac{q_{t+1} K_t}{R} \tag{10}$$

If prices, q_t, q_{t+1}, were to rise by x% , u_t also rises by x% , $\frac{q_t}{u_t}$ does not change, and if $RB_{t-1} > aK_{t-1}$, that is if debt repayments exceed output (which will be true in equilibrium), then farmers' demanf for land, K_t, rises! The traditional notion that a higher land price q_t reduces the demand for land does not apply: i) farmers can borrow more when q_{t+1} is higher, and ii) their net worth increases as q_t rises. Even though the required down payment u_t per unit of land rises proportionately with q_t and q_{t+1}, the farmers' net worth is increasing more than proportionately with q_t because of the leverage effect of the outstanding debt (questo si deprezza).

Gatherers

A gatherer is not credit constrained. His demand for lend is determined at the point at which:

$$\frac{1}{R}\left[G'(k_t') + q_{t+1}\right] = q_t \tag{11a}$$

the left-hand side is the marginal benefit of owning land, the right-hand side the opportunity cost of owning land.

(11a) can also be written as:

$$\frac{1}{R}G'(k_t') = u_t \tag{11}$$

u_t has a double role: it is the gatherers' opportunity cost of holding one unit of land, and it is also the required down payment per unit of land held by the farmers.

Since all gatherers are identical (have the same production functions), their aggregate demand for land equals

$$mk_t'$$

where k_t' is given by (11).

Markets Equilibrium

The land market equilibrium requires:

$$K_t + mk_t' = \overline{K}$$

that is:

$$k_t' = \frac{1}{m}\left(\overline{K} - K_t\right)$$

and therefore from (11):

$$u_t = \frac{1}{R} G' \left[\frac{1}{m}\left(\overline{K} - K_t\right)\right] \tag{12}$$

where

$$u_t \equiv q_t - \frac{q_{t+1}}{R}$$

and K_t is the farmers' demand for land as given by (9).

Equation (12) is the land market equilibrium condition; u_t is increasing in K_t: if the farmers' demand for land increases, then for the market to clear the gatherers' demand for land has to be cut back by a rise in their opportunity cost of holding land, i.e. by an increase of u_t.

Given that gatherers have linear preferences and are not credit constrained, in equilibrium the (gross) interest rate R equals their rate of time preference:

$$R = \frac{1}{\beta'}$$

and given (12) all markets clear ($R = \frac{1}{\beta'}$ is the credit market equilibrium condition, (12) is the land market eq. condition, by Walras law the fruit market is also in eq.)

To Sum up

Market equilibrium is described by:

$$K_t = \frac{1}{u_t}\left[(a + q_t)\, K_{t-1} - RB_{t-1}\right] \tag{9}$$

$$B_t = \frac{q_{t+1}K_t}{R} \tag{10}$$

$$u_t = \frac{1}{R} G' \left[\frac{1}{m} \left(\overline{K} - K_t \right) \right] \tag{12}$$

where

$$u_t \equiv q_t - \frac{q_{t+1}}{R}$$

Steady State Equilibrium

q^*, K^*, B^* and associated $u^* \equiv q^* \left(\frac{R-1}{R} \right)$, that solve

$$K^* = \frac{1}{u^*} \left[\left(a + q^* \right) K^* - RB^* \right] \tag{9*}$$

$$B^* = \frac{q^* K^*}{R} \tag{10*}$$

$$u^* = \frac{1}{R} G' \left[\frac{1}{m} \left(\overline{K} - K^* \right) \right]. \qquad (12*)$$

That is:

$$q^* \left(\frac{R-1}{R} \right) = u^* = a \qquad (13a)$$

$$\frac{1}{R} G' \left[\frac{1}{m} \left(\overline{K} - K^* \right) \right] = u^* \qquad (13b)$$

$$B^* = \frac{a}{R-1} K^* \qquad (13c)$$

Remark

$R-1$ is the (net) interest rate, $(R-1)\, B^*$ is the interest on the farmers' debt; aK^* is the farmers' tradable output. By (13c), we then have that the amount of debt farmers' have is such that their tradable output is just enough to cover the interest payment on the debt.